MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK

4.

1968. június

S. eg

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
Számítástechnikai Központja

K Ö Z L E M É N Y E K
4.

Budapest, 1968.
junius

Felelős szerkesztő:

Szelezsán János

Szerkesztőbizottság:

Arató Mátyás
Balázs János
Dancs István
Gergely József
Kovács Győző

A cikkek lektorai:

Bakos Tamás
Czách László
Csáki Péter
Frey Tamás
Kéri Gerzson
Németh Géza
Pásztor Endréné
Sebestyén Zoltán
Zimányi Józsefné

Felelős kiadó:

Balázs János igazgató

Technikai szerkesztő:

Hartmann Katalin

MTA Számitástechnikai Központ
Budapest, I. Uri u. 49.

Sonnevend György:

Végtelen dimenziós terek konvex halmazairól

E dolgozatban a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek és a konvex testek elmélete két klasszikus eredményének végtelendimenziós térre vonatkozó kiterjesztésével foglalkozunk.

C. Caratheodorey bizonyitotta, hogy egy n dimenziós tér bármely kompakt, konvex K halmazához tartozó pont előállitható K legfeljebb $n+1$ extremális pontjának konvex kombinációjaként.

A lineáris egyenlőtlenség-rendszerek /n dimenziós térben/ elmélete többek között Farkas Gyula és Minkowski Hermann vizsgálataiból ered.

Az elmélet alkalmazást nyer a számelméletben, a funkcionálanalizis számos témakörében és az utóbbival kapcsolatosan fontos segédeszköz az elméleti fizikában is /kvantumállapotok klasszifikációja/. Alapvető szerepet játszik az "optimális programozási" elméletekben /pl. Kuhn-Tucker tétel/.

Az alaptétel n dimenziós vektorokra vonatkozó egyenlőtlenség-rendszerekre:

Tegyük fel, hogy az $\underline{a}$ az $\{a_\lambda\} = A$ vektorok / λ tetszőleges index-halmaz/ "következménye", azaz abból, hogy valamely x vektorra

/1/ $\quad (a_\lambda , x) \leq 0 \qquad$, [( ) a skaláris szorzatot jelöli] következik, hogy

/2/ $(a, x) \leq 0$

Ekkor van n+1 nemnegativ szám: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ és n+1 A-beli $a_1, \ldots, a_{n+1}$ elem, hogy

/3/ $$a = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i$$

feltéve, hogy az A-beli vektorok az n-dimenziós tér egy zárt halmazát alkotják.

Vizsgáljuk e tétel általánositását X lokálisan konvex topológikus, valós vektor terekre!

Az /1/ és /2/ relációk pozitiv homogenitása alapján a fenti alaptételt igy is fogalmazhatjuk:

Minden A zárt konvex kupra

/4/ $$^{\circ}(A^{\circ}) = A$$

ahol, ha X ill. X' jelenti a teret és a téren értelmezett folytonos lineáris funkcionálok terét /"duális"/, tetszőleges $M \subset X$ halmazra

$$M^{\circ} = \{ x' \in X' ;\quad x \in M \rightarrow (x, x') \leq 0 \}$$

ill. tetszőleges M' X' halmazra

$$^{\circ}M' = \{ x \in X ;\quad x' \in M' \rightarrow (x, x') \leq 0 \}$$

A /4/ összefüggés valóban a fenti alaptétel általánositása /a /3/ belőle a Caratheodorey tétel alkalmazásával kapható feltéve, hogy az $\{a_\lambda\}$-k által generált K konvex kupnak van kompakt sikmetszete, mely nem megy keresztül az origon és generálja K-t./

/4/ bizonyitása egy a Hahn-Banach tételt általánositó Mazurtól eredő tétel alkalmazásával lehetséges.

Először is természetesen $M \subset {}^{\circ}(M^{\circ})$. Tegyük fel létezik $x_0 \in {}^{\circ}(M^{\circ}) - M$ Mazur fenti tétele azt mondja ki, hogy minden lokálisan konvex térben levő M, a 0-t tartalmazó zárt konvex halmazon kivüli x_0 ponthoz létezik olyan f_0 folytonos lineáris funkcionál, melyre

/5/ $f_0(x_0) > 1$ és $f_0(x) \leq 1$ az M-n

/ld. pl. Yosida /1/ 4. fej. 6. §. 3' tétel./

Mivel esetünkben M kup, M-n csak $f_0(x) \leq 0$ lehet /egy kupban minden elem tetszőleges pozitiv számszorosa is benn van/. Ez pont azt jelenti, hogy $f_0 \in M^0$, mig az /5/ első relációjából ellentmondásra jutunk: x_0 nem tartozhat ${}^{\circ}(M^{\circ})$-hoz.

Ahhoz, hogy a /3/-hoz analóg előállitást biztosithassunk a Caretheodorey tétel végtelendimenziós analogonjának ismerete kellene, azaz hogyan reprezentálhatók egy konvex halmaz pontjai extremális pontjai segitségével. Choquet bizonyitotta a következő tételt: Legyen X egy lokálisan konvex popologikus vektortér konvex, kompakt részhalmaza, mely metrizálható, ekkor X extremális pontjainak E halmaza G_δ tipusu és minden $x \in X$-hez E-n létezik egy nemnegativ μ_x Baire-mérték, hogy

$$f(x) = \int_E f(e)\mu_x(de)$$

minden $f \in X'$ -re. Azaz x a μ_x mérték baricentruma. A fenti mérték adott $x \in X$-re, akkor és csak akkor egyértelmü, ha az $L \times R$ /R a valós számok tere/ térben az $X \times 1$ által generált kup háló az általa definiált részben rendezésre. /Ha $0 \in K$ kup egy L lineáris téren, akkor $x \geq y$ akkor és csak akkor, ha $(x-y) \in K$ továbbá egy részben rendezett halmaz háló, ha bármely két eleméhez van egyértelmü min. és max.

/E két tétel bizonyitását illetően lásd Choquet-Meyer cikkét a részben rendezett lineáris terek elméletét illetően Yosida /1/, XII. fej. ill. Bourbaki "Integration" 1. könyvét . - Az ilyen konvex halmazokat szimplexeknek nevezhetjük /véges, n dimenziós esetben éppen a szimplexek - n+1 pont konvex burkai rendelkeznek a fenti tulajdonsággal/. - Tanulságos a következő példa. A funkcionálanalizisből ismert, hogy Szeparábilis normált tér duálisának egységgömbje konvex kompakt metrizálható tér a gyenge topológiában.

Speciálisan a $C(0,1)$ tér duálisát tekintve, amely a $[0,1]$-n értelmezett Lebesque-Stieltjes /korl.var.fgv./ mértékek összessége, a pozitiv mértékekre a norma $\int_{[0,1]} 1 \, d\mu$, ezért az 1 normáju pozitiv elemek (K) egy "sikon" feküsznek /rajtuk az azonosan 1 függvény által definiált lineáris folyt funkcionál konstans 1 értéket vesz fel/ - és a pozitiv mértékek kupja a Hahn-felbontás létezéséből következően hálószerü. Végül K extremális pontjai a $[0,1]$ intervallum pontjaival állanak kölcsönösen egyértelmü megfeleltetésben, látjuk tehát, hogy a Choquet-Meyer tétel itt éppen a Riesz-Markov reprezentációs tételt adja. És e példa mutatja, hogy végtelendimenziós esetben előfordulhat az is, hogy a reprezentáló mérték nem atomos /mint a Caratheodorey tételből következően véges dimenziós esetben/.

Minthogy a $C(0,1)$ duális tere /korlátos változásu függvények/ nem szeparábilis a kérdés felvetődik; L szeparábilis pl. Hilbert tér esetén, mikor atomosak a reprezentáló mértékek?

Először megmutatjuk, hogy az un. Hilbert tégla esetén a fenti kérdésre igenlő a válasz, majd egy másik példát mutatunk, melyben a válasz tagadó.

A Hilbert tégla T megszámlálható sok szakasz direkt szorzata. (l_2) -ben azon pontok halmaza $\{(x_n)\}$ melyekre $|x_n| < \frac{1}{n}$ n=1,2,...

T konvex kompakt halmaz /általában: egy bázissal rendelkező szeparábilis B-térben egy T halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van n_0, hogy $n > n_0$-ra: $\|R_n x\| < \varepsilon$, $x \in T$-re egyenletesen, - $R_n x$, az x kifejtésében az n taggal kezdődő "maradék" összeg /farok/. Lásd pl. Lusztyernyik Szoboljev: Elemente der Funkcionalanalysis, Berlin, 1960. Kap. IV./

T extremális pontjai E az élvégpontok direkt szorzata jelentse d_n a T n dimenzióját adó élvektor felét. T bármely pontja $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ alakban irható, ahol $|c_n| \leq 1$ és E pontjait $|C_n| = 1$ jellemzi.

Megmutatjuk, hogy T bármely pontja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_n$$

alakban irható, ahol e_n extremális ($\in$ E). Mivel $\sum \frac{1}{2^n} = 1$, ebből következik, hogy a reprezentáló mértékek választhatók atomosnak.

A bizonyitás azon alapszik, hogy az $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ sor alkalmas előjelezésével minden -1 és +1 közé eső szám megkapható, minden C_n-hez választunk egy ilyen előjelezést, és e_n-t ezáltal jelöljük ki.

Elég azt bizonyitani, hogy az $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$-k előjelezésével kapott véges összegek mindenütt sürün vannak a $[-1,1]$-ben a végtelen összegek ennek lezárását adják. Minthogy a diadikusan racionális számok:

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{2^{n_i}} \qquad n_i > n_j \quad i > j\text{-re}$$

mindenütt sürün vannak, elég megmutatni, hogy ezek előállithatók a fenti előjelezésekkel. Ez pedig azért lehetséges, mert

$$\frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{s-2}} - \frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{2^s} = \dots$$

ha az n_i sorozatban hézag van, azt kipótolhatjuk.

Érdekes megjegyezni, hogy a Hilbert téglának nincs baricentrikus felbontása, azaz a véges-dimenzióju tégla csökkenő dimenzióju lapközéppontjai által alkotott szimplexekre bontáshoz analóg felbontás.

A véges dimenziós esetben $\sum_{n=1}^{m} \pm c_n e_n$, $1 \geq c_1 \geq c_2 \ldots \geq 0$ valamilyen konkrét előjelválasztásra adott egy szimplexet, és mivel minden véges sorozat monoton sorozatba irható, azért e szimplexek együttese kiadta a téglát.

Hilbert téglánál $\{c_n\}$-nek a $[0,1]$-neli racionális számokat véve olyan pontot kapunk, mely nincsen benn egyetlen szimplexben sem /szimplex: a $\sum c_n (\pm e_n)$, ahol $0 \leq c_n \leq 1$ és $\{c_n\}$ megszámlálható sok monoton részre bonatható /melyek maguk is monoton következnek, irhatók egymásután/. Valóban a rac. számok természetes rendjükben nem irhatók le. - A baricentrikus felbontást tehát általánositani kell majd.

A következő példánkban látjuk, hogy a Caratheodorey tételben szereplő $n+1$ helyébe végtelendimenziós /de szeparábilis/ általánositásánál a megszámlálhatónál "(n)" jóval nagyobb számosság "$(n+1)$ként" a kontinuum lép.

Tekintsük az $L_2(0,1)$ Hilbert térben azon függvényeket /pontosabban ezek osztályait mod 0 mértékü halmazokra/, melyek monoton csökkenők, pozitivak és 1-nél nem nagyobbak.

Ezek halmaza X konvex és kompakt, M.Riesz, Kolmogorov, Frechet jól ismert kompaktsági kritériuma teljesül:

$$\int_0^1 |x(t)|^2 \, dt < K$$

és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan δ, hogy ha $0 < h < \delta$

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^2 \, dt < \varepsilon$$

Valóban a monotonitás miatt

és mivel $0 \leq x(t) \leq 1$

$$\mu(S_n) = \mu\left(t:\ h \cdot n \leq x(t+h) - x(t) < h(n+1)\right) \leq \left(\frac{1}{n} - h\right) \nu(S_n)$$

ahol $\nu(S_n)$ az $x(t)$ függvény által generált Borel mérték $\mu = dt$ a Lebesque mérték.

$$x(t) = \int_t^1 1 \, d\nu$$

Ezért

$$\int_{S_n} |x(t+h) - x(t)|^2 \, dt < (n+1)^2 \, h^2 \left(\frac{1}{n} - h\right) \nu(S_n) \leq h \, \nu(S_n)$$

felhasználva az $\left(\frac{1}{n} - h\right) \cdot h \leq \left(\frac{1}{2n}\right)^2$ és $n+1 \leq 2n$ összefüggéseket. Ha $n = 0$, akkor

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^2 \, dt \leq h^2 < h$$

Mivel $\sum \nu(S_n) \leq x(o) - x(1) \leq 1$ kapjuk, hogy a követelt reláció teljesül $\varepsilon = 2\delta$ véve, minthogy egy L_2-ben konvergens sorozatnak van majdnem mindenütt konvergens részsorozata és az is monoton függvényhez tart: X kompakt.

Az X halmaz extremális pontjai E a $[0, \xi]$ intervallumok $\xi \leq 1$ karakterisztikus függvényei, - minden fenti tipusu $x(t)$ függvény a ν mértéket ezeken egyértelmüen meghatározza. Ha a ν mérték nem atomos, az általa előállitott függvény nem nyerhető megszámlálható sok extremális pont segitségével.

Irodalom:

1. Yosida, Functional Analysis, Springer 1965, oroszul, 1967.
2. Choquet-Meyer: Existence et unicité des representations integrales, Annales de l' Institut Fuorier, 1963. p. 139-154.
3. C.Berge et Ghomla-Honri: Programmes, jeux et reseaux de transport, Dunod Paris 1962, oroszul is megjelenik.

S u m m a r y

In this note we want to investigate the problem of the generation a convex set by its extrem points in the infinite dimensional case.

The fundamental theorem of G.Choquet states:
Be X a locally convex topological vector space, K a compact convex subset of it. Then, the set of the extremal points of K, E, is G_δ and to every point $x \in K$ there is a Baire measure on E having x as harycentrum, that is

$$x = \int_E e \, d\mu^x(e) \qquad \mu(E) = 1, \ \mu(E') \geq 0 \text{ for } E' \subset E$$

We inquire: in what cases is this measure discret /atomic/ - specially when X is a separable Hilbert - space. First we shaw, that for the so called-/compact/-Hilbert paralelogram: $\{x_n\}$, $|x_n| \leq \frac{1}{n}$ all μ^x can be chosed to have the discret weights $\frac{1}{2^n}$, $n = 1,2,\ldots$ /However K-has ordinary barycentic decomposition/. The more interesting second example shows that - in $L^2(0,1)$ taking K to be the set of monoton decrising fonctions $x(t)$, such that $0 \leq x(t) \leq 1$ - wich is proven to be compact - the discret measures on E are not sufficient to generate a /continous/ function in K.

Р е з ю м е

В этой статье изучается представление выпуклого множества через его крайние точки в бесконечномерном случае.

Основная теорема Шоке гласит: для каждого пункта x выпуклого, метризуемого, компактного множества K локально-выпуклого пространства X существует бэровская неотрицательная мера μ^x такая, что $\mu^x(E) = 1$, где E - множество / типа G_δ / крайних точек K, и x является " барицентром " т.е.

$$x = \int_E e\mu^x(de) \qquad \mu(E) = 1, \qquad \mu(E') \geq 0$$

для $E' \subset E$

Спрашивается: когда эта мера дискретна в случае X сепарабельного гильбертового пространства. Пусть K " гильбертов параллелограмм ".

$\{x_n : |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$, тогда может быть взята мера μ^x, имеющая дискретные весы $\frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$,

Однако теперь обыкновенное " барицентрическое " разбиение невозможно. Интересен и второй пример, когда K - множество убывающих функций $0 \leq x(t) \leq 1$, в $L_2(0,1)$ - это множество компактно, но для представления непрерывной функции дискретные меры уже недостаточны.

Varga Gyula:

A Bairstow-féle eljárás általánositása trigonometrikus polinomok faktorizálására

A Bairstow-féle eljárás itt közlésre kerülő általánositása lehetővé teszi az

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cos k x + q_k \sin kx$ alaku trigonometrikus

polinomok $\alpha \cos x + \beta \sin x + 1$ alaku tényezőkre való felbontását.

Tekintsük a következő azonosságot:

$$f(x) = (\alpha \cos x + \beta \sin x + 1) \cdot g(x) + A(\alpha,\beta) \sin x + B(\alpha,\beta) \quad /1/$$

ahol $g(x)$ n-1-edrendü trigonometrikus polinom. Ez a felirás a linearizálási képletek alapján lehetséges.

Az

$$\left.\begin{aligned} A(\alpha,\beta) &= 0 \\ B(\alpha,\beta) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad /2/$$

egyenletrendszert iteráció segitségével akarjuk megoldani α -ra és β -ra. Ehhez az

$$A + A_\alpha \, d\alpha + A_\beta \, d\beta = 0$$
$$B + B_\alpha \, d\alpha + B_\beta \, d\beta = 0$$

lineáris egyenletrendszert kell $d\alpha$ -ra és $d\beta$ -ra megoldanunk. Az egyenletrendszerben szereplő parciális deriváltakhoz a következőképpen jutunk:

Deriváljuk /1/-et α ill. β szerint. A következőket kapjuk:

$$g(x)\cos x = -(\alpha\cos x + \beta\sin x + 1)\, g_\beta(x) - \\ - A_\alpha(\alpha,\beta)\sin x - B_\alpha(\alpha,\beta) \qquad /3/$$

ill.

$$g(x)\sin x = -(\alpha\cos x + \beta\sin x + 1)\, g_\beta(x) - \\ - A_\beta(\alpha,\beta)\sin x - B_\beta(\alpha,\beta) \qquad /4/$$

Látható, hogy A-t, B-t, valamint összes elsőrendű parciális deriváltjait egy-egy n-edrendű trigonometrikus polinom $\alpha\cos x + \beta\sin x + 1$-gyel való osztásakor keletkezett maradék együtthatóiként kapjuk.

Kiindulva valamilyen kezdeti értékekből (α_0, β_0), most már felirhatjuk a /2/ egyenletrendszer megoldására szolgáló iterációt:

$$\alpha_{i+1} = \phi(\alpha_i, \beta_i)$$
$$\beta_{i+1} = \psi(\alpha_i, \beta_i) \qquad /5/$$

ahol

$$\phi(\alpha,\beta) = \alpha - \frac{BA_\beta - AB_\beta}{A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha} \quad \text{és} \quad \psi(\alpha,\beta) = \beta + \frac{AB_\alpha - BA_\alpha}{A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha}$$

A nevezőkben szereplő Jacobi-féle determináns 0-tól való különbözőségét a későbbiekben mutatjuk meg.

<u>Állitás:</u> Legyen $\bar\alpha\cos x + \bar\beta\sin x + 1$ $f(x)$ tényezője, és legyenek ennek gyökei ξ és η ; amennyiben $g(\xi)$ és $g(\eta)$, valamint $\bar\alpha$ zérustól különbözők, akkor az /5/ iterációs eljárás konvergenciája legalább másodrendű.

<u>Bizonyitás:</u> Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\phi_\alpha(\bar\alpha,\bar\beta)=\phi_\beta(\bar\alpha,\bar\beta)=\psi_\alpha(\bar\alpha,\bar\beta)=\psi_\beta(\bar\alpha,\bar\beta)=0$$

Irjuk fel ezeket a parciális deriváltakat:

$$\phi_\alpha(\alpha,\beta)\Big|_{\alpha=\bar\alpha,\,\beta=\bar\beta}=\left[\frac{BA_{\alpha\beta}-AB_{\alpha\beta}}{D}-\frac{(BA_\beta-AB_\beta)D_\alpha}{D^2}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=\bar\alpha\\ \beta=\bar\beta}}$$

stb.

Ahol D a már emlitett Jacobi-féle determináns. Mivel $A(\bar\alpha,\bar\beta)=0$ és $B(\bar\alpha,\bar\beta)=0$, ezért elegendő megmutatni, hogy $D(\bar\alpha,\bar\beta)\neq 0$.

1./ $\xi\neq\eta$. Behelyettesitve ξ -t és η -t /3/-ba és /4/-be, a kapott egyenletrendszerből kifejezhetők a szükséges parciális deriváltak, amelyekből D képezhető:

$$D=g(\xi)\,g(\eta)\frac{\sin(\xi-\eta)}{\sin\eta-\sin\xi} \qquad /6/$$

mivel $\bar\alpha\cos\xi+\bar\beta\sin\xi+1=0$ és

$\bar\alpha\cos\beta+\bar\beta\sin\eta+1=0$ ezért

$$\frac{\sin(\xi-\eta)}{\sin\eta-\sin\xi}=\frac{1}{\bar\alpha}$$

tehát

$$D=\frac{g(\xi)\cdot g(\eta)}{\bar\alpha}\quad ; \qquad D\neq 0$$

2./ $\eta=\xi$. A /6/ közvetlenül nem alkalmazható, de megkiséreljük $\eta\to\xi$ határátmenet utján eljutni D-hez:

Legyen $\xi-\eta=\delta$, akkor

$$\frac{\sin(\xi-\eta)}{\sin\eta-\sin\xi}=\frac{\sin\delta}{\sin\xi\cos\delta-\cos\xi\sin\delta-\sin\xi}=$$

$$=\frac{1}{\sin\xi\frac{\cos\delta-1}{\sin\delta}-\cos\xi}\longrightarrow-\frac{1}{\cos\xi}\qquad(ha\ \delta\to 0)$$

tehát

$$D=-\frac{g^2(\xi)}{\cos\xi}$$

Mivel továbbá $\bar{\alpha}\cos\xi + \bar{\beta}\sin\xi + 1 = 0$, és mivel ξ kétszeres, deriválva $-\bar{\alpha}\sin\xi + \bar{\beta}\cos\xi = 0$, e két egyenletből kapjuk

$$\bar{\alpha}=-\cos\xi\quad\text{, tehát}$$

$$D=\frac{g^2(\xi)}{\bar{\alpha}}\qquad D\neq 0$$

Ezzel a bizonyitást befejeztük. A bizonyitásnál felhasználtuk, hogy A és B kétszer folytonosan deriválhatók. Utolsó eredményünk alapján mondhatjuk, hogy a konvergencia akkor is másodrendü, ha $\bar{\alpha}\cos\xi + \bar{\beta}\sin\xi + 1$ kétszeres gyökkel rendelkezik. Nem foglalkoztunk azzal az esettel, amikor $\alpha\cos x + \beta\sin x + 1$ magasabb hatványa is tényezője $f(x)$-nek.

Megjegyzés: $\bar{\alpha} = 0$ esetén /1/-et a következőképpen módositjuk: $f(x)=(\alpha\cos x+\beta\sin x+1)\cdot g(x)+A^*(\alpha,\beta)\cos x+B^*(\alpha,\beta)$.
Az eljárás ettől kezdve hasonló ahhoz, amit $\bar{\alpha}\neq 0$ esetén követtünk, és $D=-\frac{g(\xi)g(\eta)}{\bar{\beta}}$ ill. $D=-\frac{g^2(\xi)}{\bar{\beta}}$ adódik, ha $\bar{\beta}\neq 0$.

A közölt eljárás programja az Ural-2 elektronikus számológépre készült EFT autókódban.

Irodalom:

J.F.Traub: Iterative methods for the solution of equations /Prentice Hall Inc./

G.H.Golub, T.N.Robertson: A generalized Bairstow Algoritm /CACM 1967. junius/

G.M.Birtwistle, D.J.Evans: On the generalisation of Bairstow's method. /BIT 1967. Nr.3./

S u m m a r y

In the paper a generalization of Bairstow's method which makes possible the factorization on factors of the form $\alpha \cos x + \beta \sin x + 1$ of the trigonometric polynoms of form $\sum_{i=o}^{n} p_i \cos i x + q_i \sin i x$ is described. As a result of the procedure the convergence is quadratic even if $\alpha \cos x + \beta \sin x + 1$ has double roots.

Р е з ю м е

В статье дано обобщение метода Берстова,которое даёт возможность разложить тригонометрические многочлены, заданные в виде

$\sum_{i=0}^{n} p_i \cos ix + q_i \sin ix$, на множители $\alpha \cos x + \beta \sin x + 1$.

В качестве результата получено, что сходимость квадратична и в случае $\alpha \cos x + \beta \sin x + 1$ имеется двукратный корень.

Harnos Zsolt:

Konvex zárt halmazok képének a zártságáról

Az jól ismert, hogy egy X Hausdorff-féle topológikus tér M részhalmazának a folytonos képe egy Y Hausdorff-féle topológikus térben általában nem zárt, de ha az M halmaz kompakt - tehát zárt -, akkor a képe is kompakt.

A kompaktság felhasználása nélkül adunk egy feltételt zárt halmazok képének zártságára vonatkozólag.

1. tétel:

Tekintsünk egy lineáris folytonos A operátort, amely definiálva van egy X reflexiv Banach-téren, és az X teret egy Y Banach-térbe képezi.

Az X tér minden korlátos konvex zárt részhalmazának a képe korlátos konvex zárt.

Bizonyitás:

Legyen M az X tér korlátos konvex zárt részhalmaza. Az nyilvánvaló, hogy $A(M)$ - az M halmaz képe - konvex és korlátos.

Legyen y_0 az $A(M)$ halmaz lezárásának egy pontja. Az M-ben létezik olyan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat, amelyre az Ax_n konvergál erősen az y_0-hoz. Az X tér reflexiv, ezért az M halmaz gyengén kompakt, s igy az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatból kiválasztható egy $\{x_{n_i}\}$ részsorozat, amely gyengén konvergál az X tér valamely x_0 eleméhez. Feltehetjük, hogy a kiválasztott $\{x_{n'}\}$ sorozat megegyezik az eredeti $\{x_n\}$ sorozattal.

A Mazur-tétel[x] miatt az x_0 benne van az $\{x_n\}$ sorozat zárt, konvex burkában, tehát $x_0 \in M$.

A Mazur-tétel ismételt alkalmazásával konstruálható egy $\tilde{x}_n$ sorozat az M-ben, amely konvergál erősen az x_0-hoz. Mivel az $\{x_k\}_{k=n}^{\infty}$ konvergál gyengén az x_0-hoz, ezért a Mazur-tétel szerint minden n természetes számhoz léteznek olyan nemnegativ számok

$$\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{p_n}^{(n)}\ ; \quad \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j^{(n)} = 1 ,$$

hogy
$$\left\| \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j^{(n)} x_{n+j} - x_0 \right\| < \frac{1}{n} .$$

Legyen
$$\tilde{x}_n = \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j^{(n)} x_{n+j} .$$

Az nyilvánvaló, hogy $\tilde{x}_n \in M$ és
$$\| \tilde{x}_n - x_0 \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Az A operátor folytonossága miatt elég bizonyitani, hogy $A\tilde{x}_n$ konvergál erősen az y_0-hoz, mert ebben az esetben
$$y_0 = \lim_{n \to \infty} A\tilde{x}_n = Ax_0 \in A(M) .$$

---

[x] Mazur tétel.

Legyen az X normált térben az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat gyenge limesze x_0. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van az x_n elemeknek olyan konvex kombinációja $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ $\left(\alpha_j \geq 0\ ;\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1\right)$ hogy $\| x_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \| < \varepsilon$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor létezik olyan $N(\varepsilon)$, hogy

$$\| Ax_n - y_0 \| < \varepsilon \text{ , ha } n \geq N(\varepsilon) .$$

Az nyilvánvaló, hogy

$$\| A\tilde{x}_n - y_0 \| = \| \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j A x_{n+j} - y_0 \| =$$

$$= \| \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j (A x_{n+j} - y_0) \| \leq \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j \| A x_{n+j} - y_0 \| < \varepsilon$$

hacsak $n \geq N(\varepsilon)$. Q.E.D.

A három feltétel /reflexivitás, korlátosság és konvexitás/ egyike sem hagyható el még teljesen folytonos operátor esetén sem.

<u>1. példa:</u>

Legyen $X = C[0,1]$, azaz a $[0,1]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények tere.

Ismert, hogy az X nem reflexiv.

Az $M = \{ x(t) : x(t) \in X, \ x(0) = 0, \ x(1) = 1, \ 0 \leq x(t) \leq 1 \}$

halmaz korlátos, konvex és zárt.

Tekintsük az $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$ lineáris, korlátos, tehát teljesen folytonos funkcionált.

Ebben az esetben $f(M) = (0,1)$ nyilt intervallum, mert

$$x_\alpha(t) = t^{\frac{1}{\alpha}-1} \in M$$

amint $0 < \alpha < 1$, de nem létezik olyan $x \in M$, hogy

$$f(x) = 0, \text{ vagy } f(x) = 1.$$

2. példa:

Legyen $X = R^2$ az Euklidesi sik.

Az $M = \{z: \; z = (x,y), \; 0 < x \leq 1, \; \frac{1}{x} \leq y\}$

konvex, zárt de nem korlátos.

Az $f(x) = x$ funkcionál lineáris korlátos /teljesen folytonos/ és $f(M) = (0,1]$ balról nyilt, jobbról zárt intervallum.

3. példa:

Legyen X Hilbert-tér és M a $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormált rendszer. X reflexiv, M korlátos zárt, de nem konvex.

Tekintsük az $f(\varphi) = (\varphi, \psi)$ funkcionált, ahol

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \varphi_i \quad .$$

Az $f(\varphi)$ funkcionál lineáris és korlátos /teljesen folytonos/. Mivel $f(\varphi_i) = \frac{1}{i}$, ezért

$$f(M) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \right\},$$

amely nem zárt, mivel $0 \notin f(M)$.

A fentebb bizonyitott tétel alkalmazásával bizonyitjuk a következő tételt.

2. tétel:

Legyen A egy lineáris folytonos operátor, amely leképezi az X reflexiv Banach-teret az Y Banach-térbe.

Ha M konvex, korlátos és zárt részhalmaza X-nek, és $y \in Y$, akkor létezik olyan $x_y \in M$, -y-tól függő - elem, hogy

$$\inf_{x \in M} \| Ax-y \| = \| Ax_y - y \| = dy \ .$$

Bizonyitás:

Legyen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ olyan sorozat, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \| Ax_n - y \| = dy$$

Az előző tétel bizonyitásához hasonlóan konstruálható olyan $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ sorozat, hogy $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergál valamilyen $x_y \in M$ elemhez erősen, és

$$\lim_{n \to \infty} \| A\tilde{x}_n - y \| = dy \ .$$

Az $A(M)$ az előző tétel miatt zárt, ezért $Ax_y \in A(M)$, és igy

$$\lim_{n \to \infty} \| Ax_n - y \| = \| Ax_y - y \| = dy \ . \qquad \text{Q.E.D.}$$

1. Megjegyzés:

A következő jól ismert tétel triviális következménye a második tételnek.

Legyen X reflexiv Banach-tér és H konvex, zárt részhalmaza X-nek, továbbá $y \in X$.

Ekkor létezik olyan $x_y \in H$, - y-tól függő - elem, hogy

$$\inf_{x \in H} \| x-y \| = \| x_y - y \|$$

Bizonyitás:

Alkalmazzuk a második tételt a következőképpen.

$X = Y$, és A az identikus operátor. Az M-nek válasszuk a

H-nak és egy y középpontu, elég nagysugaru gömb nem üres metszetét.

2. Megjegyzés:

Az első példa triviális következménye, hogy a $C[0,1]$ nem reflexiv Banach-tér.

S u m m a r y

On closedness of the image of convex closed sets.

Harnos Zsolt

In the paper the proof of the following theorems is given.

Theorem 1.:

Let A be a linear continuous operator which maps a reflexiv Banach space X into a Banach space Y. Then the image of each closed, convex and bounded subset of X is a closed, convex and bounded subset of Y.

Theorem 2.:

Let A be a continuous linear operator which maps a reflexiv Banach space X into a Banach space Y. If M is a bounded, convex and closed subset of X and y an orbitrary element of Y, then there is exist an $x_y \in M$ for which.

$$\inf_{x \in M} \| Ax-y \| = \| Ax_y - y \|$$

Краткое содержание статьи:

" Замкнутость образов выпуклых замкнутых множеств "

В статье дано доказательство следующих двух теорем:

1. Теорема : Пусть А линейный непрерывный оператор, отображающий рефлекторное Банахово пространство Х в Банахово пространство У. В этом случае образ каждого замкнутого выпуклого и ограниченного подмножества пространства Х будет выпуклым и ограниченным подмножеством пространства У.

2. Теорема : Пусть А линейный непрерывный оператор, отображающий рефлекторное Банахово пространство Х в Банахово пространство У. Если М ограниченное выпуклое и замкнутое подмножество пространства Х и у любой элемент пространства У, то существует один элемент $x_y \in M$, для которого выполняется

$$\inf_{x \in M} \| Ax - y \| = \| Ax_y - y \|$$

Dávid Gábor:

Az eloszlás- és sürüségfüggvény becslésének konvergenciája.

0.§.

Bevezetés: A szerző [1] dolgozatában foglalkozott olyan csoportos mintavétel segitségével történő eloszlás- és sürüségfüggvénybecsléssel, amikor a csoportositás a minta alapján történik.

Az uj definicióra azért volt szükség, mert a Glivenkó-Cantelli-tétel alkalmazásához a minta egészének ismerete szükséges, ami a Monte-Carlo-módszerek esetén a számitógép memóriájának nagysága miatt lehetetlen. Az [1] dolgozatban az 1.Tétel, a Következmény a véletlentől függő tapasztalati sürüség- és eloszlásfüggvény egyenletes konvergenciájára vonatkoznak. Felmerül azonban az a kérdés, hogy ez a konvergencia milyen gyors. Egy rögzitett pontban erre a 2.Tétel válaszolt. Az irodalomban régóta foglalkoznak ezzel a problémával, amit a következőképpen fogalmazunk meg:

ha $\alpha(x)$ az elméleti függvény, $\alpha_N(x)$ a tapasztalati, akkor

$$P\left(\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \Omega_N \sup_{x\in[a,b]} |\alpha_N(x)-\alpha(x)| \leq 1\right) = 1$$

milyen Ω_N mellett áll fent ($\Omega_N \to \infty$ ha $N \to \infty$).

Ezideig - és csak a tapasztalati eloszlásfüggvényre - a

$$P\left(\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| \geq \varepsilon\right)$$

függvény konvergenciájával kapcsolatban értek el eredményeket. Itt csak Sanov [2] és Sethuraman [3] dolgozataira utalok, ahol bőséges irodalomjegyzék található.

Az 1.§-ban a minta nagyságát vizsgálom, a 2.§-ban a konvergencia gyorsaságával foglalkozom az [1]-ben definiált sürüség - és eloszlásfüggvényre, majd a 3.§-ban az egyszerü csoportositott tapasztalati eloszlásfüggvényre.

A jelölések megegyeznek az [1] dolgozat jelöléseivel.

1.§.

Megjegyzés a tapasztalati sürüségfüggvény konvergencia-gyorsaságához.

Az 1 -ben definiált $\omega(n,m,\alpha,x)$ gyorsasági-modulus vizsgálatával kezdjük:

$$\omega(n,m,\alpha,x) = \frac{1}{2}\min\left(\omega_1(n,\alpha),\ \omega_2(n,m,x)\right)$$

ahol

$$\omega_1(n,\alpha) = \frac{C}{4C_1}\left(1-e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right)^{-1}, \quad f(x)>C>0,\ |f'(x)|<C_1,\ f'(x)\neq 0$$

és

$$\omega_2(n,m,\alpha) = \lambda(I^n_{(x)})\left[\frac{2}{m}P(I^n_{(x)})(1-P(I^n_{(x)})\log\log m\right]^{-\frac{1}{2}}$$

ahol $I^n_{(x)}$ az X -et tartalmazó, az n-elemü rendezett minta $[\xi^*_k, \xi^*_{k+1}]$ intervalluma. Jelölje egyenlőre $\lambda(I^n_{(x)}) = \delta(x)$ és $P(I^n_{(x)}) = \eta(x)$. Igy

$$\frac{\omega_2(n,m,x)}{\omega_1(n,\alpha)} = \frac{\delta\sqrt{\frac{m}{2\eta(1-\eta)\log\log m}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right)^{-1}}\frac{4C_1}{C} = \delta\sqrt{\frac{m\left(1-e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right)^2}{2\eta(1-\eta)\log\log m}}\cdot\frac{4C_1}{C}$$

azaz ha

$$\frac{m\left(1-e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right)^2}{\log\log m} \geq \frac{2P(I^n_{(x)})(1-P(I^n_{(x)}))}{(\xi^*_{k+1}-\xi^*_k)^2}\cdot\left(\frac{C}{4C_1}\right)^2$$

/1/

reláció teljesül n és m-re, ugy

$$\omega(n,m,\alpha,x) = \frac{1}{2}\,\omega_1(n,\alpha) = \frac{C}{8C_1}\left(1-e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right)^{-1}$$

Az /1/ egyenlőtlenséget még a következőképpen alakithatjuk át:
Mivel $\frac{P(I^n(x))}{\lambda(I^n(x))} \to f(x)$ ha $n \to \infty$ egy λ-0 -mértékü halmaz kivételével /az integrálszámitás középértéktétele/, igy az asszimptotikus

$$/2/ \qquad \frac{m\left(1-e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right)^2}{\log\log m} \geq 2f(x)\left(\frac{1}{\xi^*_{k+1}-\xi^*_k} - f(x)\right)\left(\frac{C}{4C_1}\right)^2$$

reláció fennállása esetén is a gyorsasági modulus az x -től független $\frac{1}{2}\omega_1(n,\alpha)$ tag. Előnye a /2/ egyenlőtlenségnek, hogy az n és m viszonyára viszonylag egyszerü összefüggést ad, hiszen a /2/ jobboldalán /a C és C_1 konstansokkal jól becsülhető f(x) sürüségfüggvényen kivül/ az n-elemü mintából könnyen kiszámitható $\xi^*_{k+1}-\xi^*_k$ intervallumhosszak segitségével adtuk meg.

__1.Tétel.__ Ha n és m-re teljesül az /1/, és az f(x) teljesiti az [1] 2. Tétel feltételeit, akkor az $\omega(n,\alpha) = \frac{C}{8C_1}\left(1-e^{-\frac{1}{n}(1+\alpha)\log n}\right)^{-1}$ jelöléssel:

$$P\left(\overline{\lim_n}\ \overline{\lim_m}\ \omega(n,\alpha)\left|f_n^m(x)-f(x)\right| \leq 1\right) = 1$$

__Bizonyitás:__ Ha /1/-ben egyenlőség esetén m=g(n), akkor m≥g(n)-re méginkább fennáll /1/, továbbá $\varepsilon > 0$-ra

$$P\left(\overline{\lim_{m\geq g(n)}}\ \omega(n,\alpha)\left|f_n^m(x)-f(x)\right| > 1+\varepsilon\right) =$$
$$= P\left(\overline{\lim_m}\ \omega(n,m,\alpha,x)\left|f_n^m(x)-f(x)\right| > 1+\varepsilon\right)$$

Igy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\overline{\lim_{m\geq g(n)}}\ \omega(n,\alpha)\left|f_n^m(x)-f(x)\right| > 1+\varepsilon\right)$$

sor konvergens az [1] 2.Tétel miatt, ami a Borel-Cantelli-lemmával bizonyitja a tételt.

2.§.

Egyenletes-konvergencia-gyorsasági tételek a tapasztalati eloszlás- és sürüségfüggvényre

Legyen

$$\omega_1^*(n,\alpha)=\frac{C}{4C_1}\left(1-e^{-\frac{1}{n}(2+\alpha)\log n}\right)^{-1} \qquad /3/$$

és

$$\omega^*(n,m,\alpha,x)=\frac{1}{2}\min\left(\omega_1^*(n,\alpha),\ \omega_2(n,m,x)\right)$$

tetszőleges $\alpha>0$ -ra. n és m teljesitse a

$$\frac{m\left(1-e^{-\frac{1}{n}(2+\alpha)\log n}\right)^2}{\log\log m}\geq\frac{2P(I^n_{(x)})(1-P(I^n_{(x)}))}{(\xi^*_{k+1}-\xi^*_k)^2}\left(\frac{C}{4C_1}\right)^2 \qquad /4/$$

egyenlőtlenséget. Bebizonyitjuk a következő tételt:

2.Tétel. Legyen [a,b] olyan intervallum, hogy az [F(a), F(b)]-ben $F^{-1}(x)$ folytonos, [a,b]-ben f(x) pozitiv, differenciálható, deriváltjára $f'(x)\neq 0$, akkor a /3/-ban definiált $\omega_1^*(n,\alpha)$ függvényre

$$\overline{\lim_n}\,\overline{\lim_m}\,\frac{1}{2}\,\omega_1^*(n,\alpha)\sup_{x\in[a,b]}\left|f_n^m(x)-f(x)\right|\leq 1$$

1 valószinüséggel, ha n és m kielégiti /4/-et.

Bizonyitás: Az [1]. 2.Tétel bizonyitásához hasonlóan elvégezve az ott használt felbontást, alkalmazzuk a

$$
/5/ \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\overline{\lim_{m>g(n)}} \frac{1}{2}\,\omega_1^*(n,\alpha) \sup_{x\in[a,b]} |f_n^m(x)-f(x)| > 1+\varepsilon\Big) \le
$$

$$
\le \sum_{n=1}^{\infty} n \max_{i=1,2,\dots n} \Big\{ P\big(\overline{\lim_m}\, \omega^*(n,m,\alpha,\xi_i^*)|f_n^m(\xi_i^*)-f(\xi_i^*)| > 1+\varepsilon\big)\Big\}
$$

becslést, ahol felhasználtuk azt, hogy

$$
P\Big(\overline{\lim_m} \frac{1}{2}\,\omega_1^*(n,\alpha) \sup_{x\in[a,b]} |f_n^m(x)-f(x)| > 1+\varepsilon\Big) \le
$$

$$
/6/ \quad \le \sum_{i=1}^{n} P\big(\overline{\lim_m}\, \omega^*(n,m,\alpha,\xi_i)|f_n^m(\xi_i)-f(\xi_i^*)| > 1+\varepsilon\big)
$$

ugyanis az $f(x)$ monotonitása miatt a szuprémum az osztópontokban vevődik fel $(f'(x) \neq 0)$.

Az /5/ jobboldalán álló valószinüségeket már megbecsültük az emlitett tétel bizonyitásában:

Az előző cikk jelöléseivel:

$$
P\Big(\overline{\lim_{m>g(n)}} \frac{1}{2}\,\omega_1^*(n,\alpha)|f_n^m(\xi_i^*) - f(\xi_i^*)| > 1+\varepsilon\Big) \le
$$

$$
\le P\Big(\overline{\lim_{m\ge g(n)}} \frac{1}{2}\,\omega_2^*(n,\alpha)|f_n^m(\xi_i^*) - f_n(\xi_i^*)| > \frac{1+\varepsilon}{2}\Big) +
$$

$$
+ P\Big(\overline{\lim_{m>g(n)}} \frac{1}{2}\,\omega_1^*(n,\alpha)|f_n(\xi_i^*) - f(\xi_i^*)| > \frac{1+\varepsilon}{2}\Big) \le
$$

$$
\le P\Big(\overline{\lim_{m\ge g(n)}}\, \omega_2(n,m,\xi_i^*)|f_n^m(\xi_i^*) - f_n(\xi_i^*)| > \frac{1+\varepsilon}{2}\Big) +
$$

$$
+ P\Big(\overline{\lim_{m\ge g(n)}}\, \omega_1^*(n,\alpha)|f_n(\xi_i^*) - f(\xi_i^*)| > \frac{1+\varepsilon}{2}\Big) \le
$$

$$
\le P\Big(\overline{\lim_m}\, \omega_2(n,m,\xi_i^*)|f_n^m(\xi_i^*) - f_n(\xi_i^*)| > \frac{1+\varepsilon}{2}\Big) +
$$

$$
+ P\Big(\omega_1^*(n,\alpha)|f_n(\xi_i^*) - f(\xi_i^*)| > \frac{1+\varepsilon}{2}\Big)
$$

Az első tag - mint [1]./11/-ben az iterált-logaritmus-tétel miatt 0, mig a második tagot az [1]./10/ becsléséhez hasonlóan becsüljük meg;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n P\left(\omega(n,m,\xi_i) \left| f_n^m(\xi_i^*) - f(\xi_i^*) \right| > \frac{1+\varepsilon}{2}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\left[1-\left(1-e^{-\frac{1}{n}(2+\alpha)\log n}\right)\right]^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} < +\infty$$

A tétel bizonyitását most már a szokásos módszerrel fejezhetjük be.

Legyen a tapasztalati eloszlásfüggvény: $F_n^m(x) = \int_a^x f_n^m(t)\,dt$, az $[a, b]$ véges intervallumban.

<u>3.Tétel.</u> A 2. Tétel feltételei mellett, ha $\Omega(n,\alpha) = \frac{\omega_1^*(n,\alpha)}{2(b-a)}$ akkor

$$P\left(\overline{\lim_{n}}\, \overline{\lim_{m \geq g(n)}}\, \Omega(n,\alpha) \sup_{x \in [a,b]} \left| F_n^m(x) - F(x) \right| \leq 1\right) = 1$$

<u>Bizonyitás</u> a következő becslés-sorozattal történik:

$$\left\{ \Omega(n,\alpha) \sup_x \left| F_n^m(x) - F(x) \right| > 1 \right\} \leq$$

$$\leq \left\{ \Omega(n,\alpha) \sup_x \left| \int_a^x f_n^m(t) - f(t)\,dt \right| > 1 \right\} \leq$$

$$\leq \left\{ \Omega(n,\alpha) \sup_x \int_a^x \left| f_n^m(t) - f(t) \right| dt > 1 \right\} \leq$$

$$\leq \left\{ \Omega(n,\alpha)(b-a) \sup_x \left| f_n^m(x) - f(x) \right| > 1 \right\} \leq$$

$$\leq \left\{ \frac{1}{2} \omega_1^*(n,\alpha) \sup_{x \in [a,b]} \left| f_n^m(t) - f(t) \right| > 1 \right\}$$

azaz

$$P\left(\overline{\lim_{n}}\, \overline{\lim_{m \geq g(n)}}\, \Omega(n,\alpha) \sup_{x \in [a,b]} \left| F_n^m(x) - F(x) \right| > 1\right) \leq$$

$$\leq P\left(\overline{\lim_{n}}\, \overline{\lim_{m \geq g(n)}}\, \frac{1}{2} \omega_1^*(n,\alpha) \sup_{x \in [a,b]} \left| f_n^m(t) - f(t) \right| > 1\right) = 0$$

ami a tételt bizonyitja.

3.§.

A csoportositott tapasztalati eloszlásfüggvény egyenletes konvergenciájának gyorsaságáról

A 3. Tételben az $F_n^m(x)$ egy monoton növekedő függvény és gyorsaságát a sürüségfüggvény gyorsaságából vezettük le. Valószinüleg a 3. Tétel állitása nem éles, és a feltételek is erősek.

A csoportositott mintavétel az [1] cikkben és a jelenlegi 1.§ és 2.§-okban az előzőleg vett n-elemü minta alapján történt. Most a számegyenest osszuk fel a_i^n $i=1,\dots,n$ osztópontokkal ugy, hogy $n\to\infty$ esetén $a_{i+1}^n - a_i^n \to 0$ legyen. /A véletlen felosztásnál ez csak 1 valószinüséggel áll fent./ Végezzünk m független kisérletet és $n \ll m$ legyen, $n\to\infty$ és jelölje m_i az i-edik intervallumba eső mintapontok számát, továbbá legyen

$$G_m(x)=\frac{\sum_{i=1}^{j(x)} m_i}{m} \qquad \text{ha} \qquad x\in\left(a_{j(x)}^n,\ a_{j(x)+1}^n\right] .$$

Tegyük fel, hogy az $[a,b]$ olyan intervallum, hogy $0<C_2<F(x)<C_3<1$.

Legyen $\frac{1}{\Omega(m)}<F(x)(1-F(x))$ minden $x\in[a,b]$-re.

Felhasználva az $F(x)$ monotonitását

$$P\left(\Omega(m)\sup_{x\in[a,b]}\left|G_m(x)-F(x)\right|>1+\varepsilon\right)\le\sum_{k=1}^{n}P\left(\Omega(m)\left|\frac{\sum_{i=1}^{k-1}m_i}{m}-F(a_k^n)\right|>1+\varepsilon\right)$$

Ismert /Rényi Alfréd: Valószinüségszámitás /1954/ 405. oldal/, hogyha ζ az A esemény relativ gyakorisága és $P(A) = p$, akkor, ha $0<\varepsilon<p(1-p)$, ugy

$$P(|\zeta_m - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 m}{2pq\left(1+\frac{\varepsilon}{2pq}\right)^2}}$$

Alkalmazva ezt a tételt, kapjuk, hogy

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{k-1} m_i}{m} - F(a_k^n)\right| \geq \frac{1+\varepsilon}{\Omega(m)}\right) \leq 2e^{-\frac{\left(\frac{1+\varepsilon}{\Omega(m)}\right)^2 m}{2F(a_k^n)(1-F(a_k^n))\left(1+\frac{\frac{1+\varepsilon}{\Omega(m)}}{2F(a_k^n)(1-F(a_k^n))}\right)^2}}$$

Mivel $\max F(x)(1-F(x)) = \frac{1}{4}$ és

$$\frac{1+\varepsilon}{\Omega(m)2F(x)(1-F(x))} \leq \frac{1+\varepsilon}{2} < 1$$

így

$$P\left(\Omega(m)\left|\frac{\sum_{1}^{k-1} m_i}{m} - F(a_k^n)\right| > 1+\varepsilon\right) \leq 2e^{-\frac{m}{2\Omega^2(m)}}$$

azaz

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P\left(\Omega(m)\left|G_m(a_k^n) - F(a_k^n)\right| > 1+\varepsilon\right) \leq 2\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-\frac{m}{2\Omega^2(m)}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{1+\alpha}} < +\infty$$

ha $e^{-\frac{m}{2\Omega^2(m)}} = \frac{1}{m^{2+\alpha}}$, amiből

$$\Omega(m) = \sqrt{\frac{m}{2(2+\alpha)\log m}}$$

és ekkor

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left(\Omega(m)\sup_{x\in[a,b]}\left|G_m(x) - F(x)\right| > 1+\varepsilon\right) < +\infty$$

minden $\varepsilon >$ 0-ra.

Összegezve:

3

4. Tétel: Ha $[a,b]$ olyan intervallum, hogy $0 < C_2 < F(a) < F(b) < C_3 < 1$ és tetszőleges $\alpha > 0$ -ra

$$\Omega(m) = \sqrt{\frac{m}{2(2+\alpha)\log m}}$$

akkor

$$P\left(\overline{\lim_{m}}\ \Omega(m) \sup_{x \in [a,b]} |G_m(x) - F(x)| \leq 1\right) = 1$$

Továbbra is nyitott kérdés maradt az, hogy vajon ezek a gyorsaságimodulusok a leggyorsabbak-e.

4.§.

Egy alkalmazás:

A feladatunk a

$$\xi = \frac{\zeta \varrho_1 - 0{,}3\varrho_2 - 0{,}1\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}$$

$$\eta = \frac{-8.4\beta}{\varrho_1} - \frac{\zeta + 0{,}4}{\varrho_2}$$

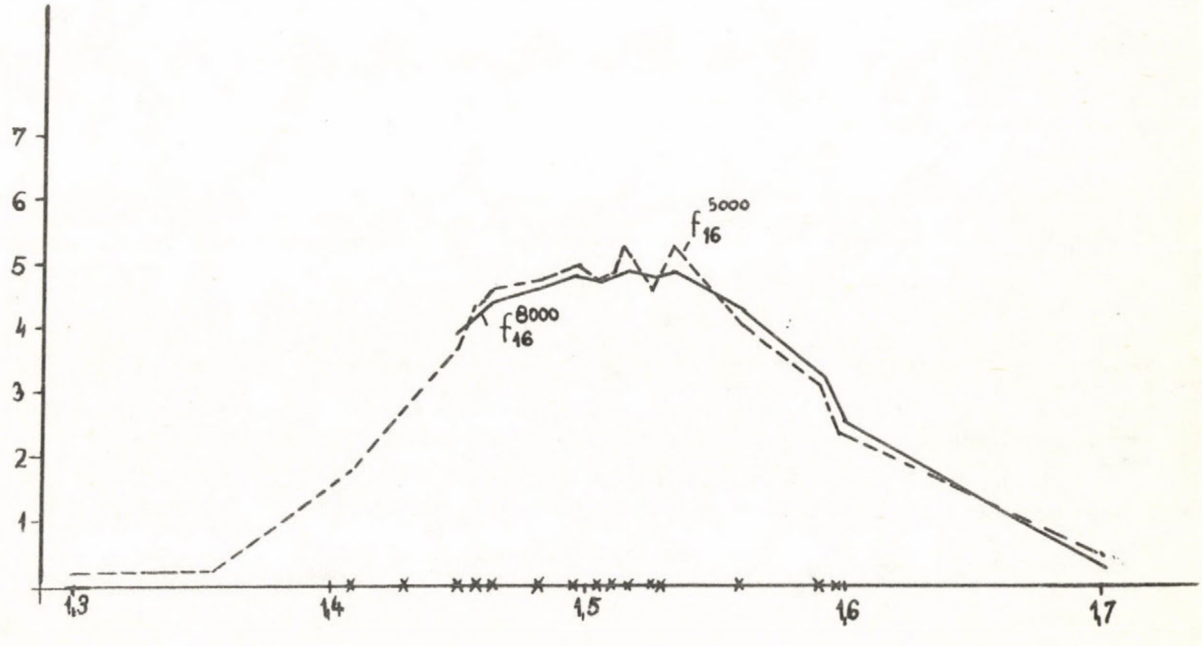
valószinüségi változók sürüségfüggvényeinek becslése volt, ahol a ϱ_1 ill. ϱ_2 csonkitott normális eloszlásu valószinüségi változók. $M\varrho_1 = 12$ ill. $M\varrho_2 = 18$ várható-értékekkel és $D\varrho_1 = 1{,}8$ ill. $D\varrho_2 = 2.7$ szórással, és a csonkitás a [11,4, 12,6] illetve a [17.1, 18.9] intervallumokon történt,

β normális eloszlásu valószinüségi változó, $M\beta = 60$, $D\beta = 45$, és a csonkitás [44, 320] intervallumon történt,

ζ az [5.4, 6.6] intervallumban egyenletes eloszlásu valószinüségi változó.

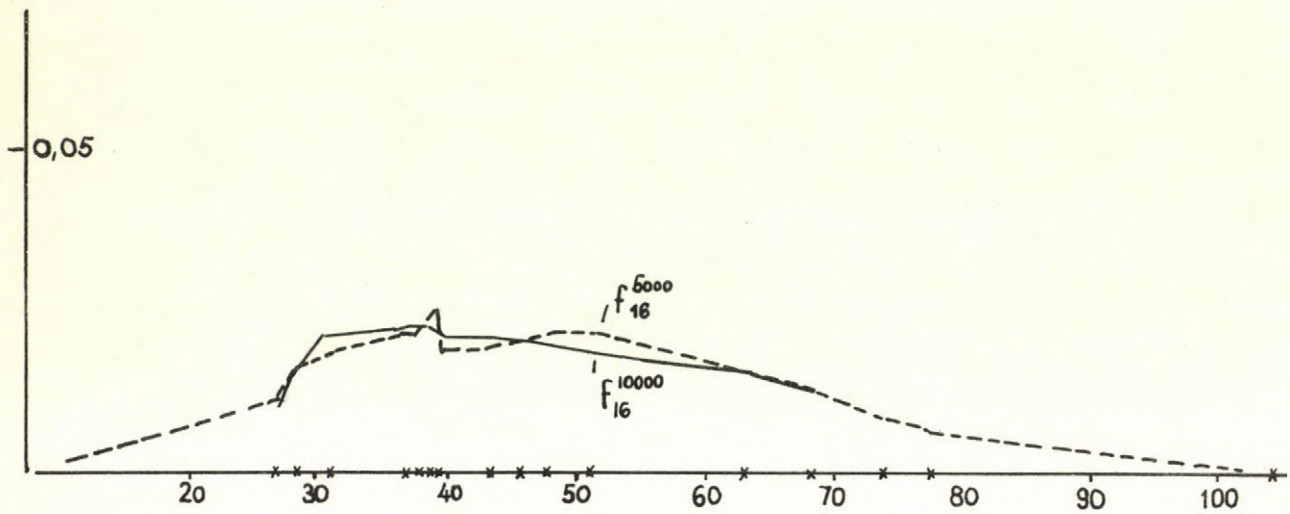
Az 1 ill. 2 ábra az $f_n^m(\xi)$ illetve az $f_n^m(\eta)$ függvények két becslését ábrázolja.

A 3 ill. 4 ábrán ugyanezen tapasztalati sürüségfüggvények szerepelnek, de $D\varrho_1 = 0.4$ és $D\varrho_2 = 0.6$ szórás mellett.



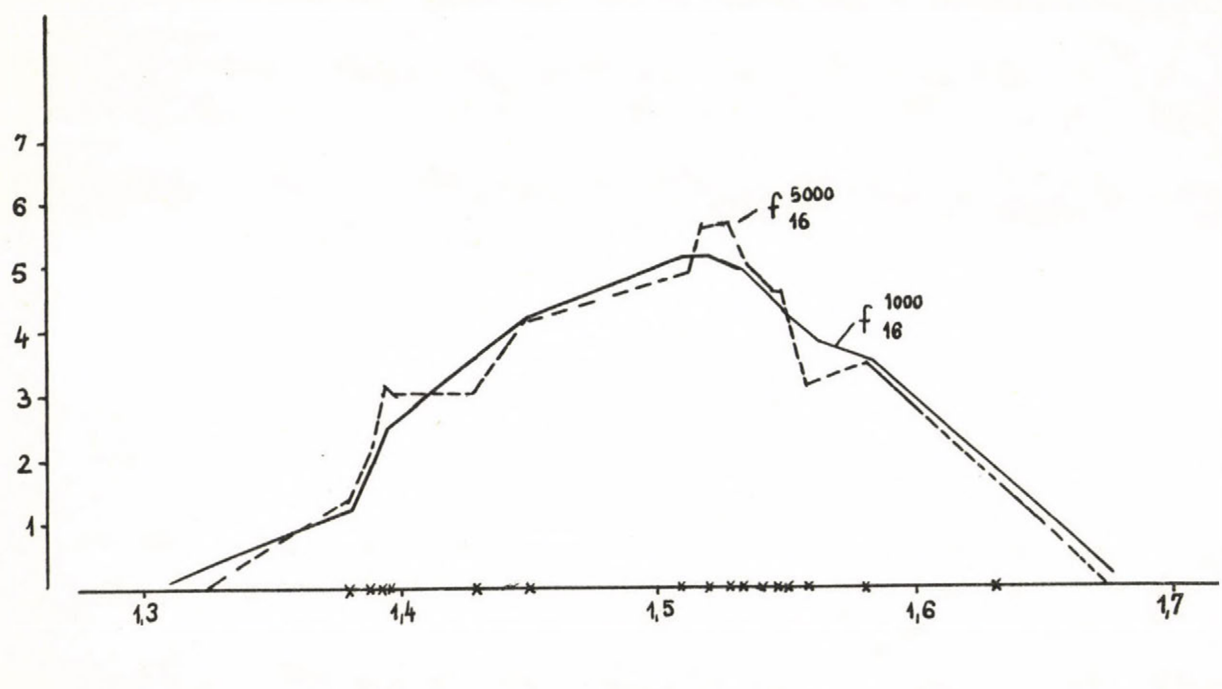
1. ábra: a ξ sürüségfüggvényének becslése

$n = 16$, $D\varrho_1 = 1{,}8$, $D\varrho_2 = 2.7$



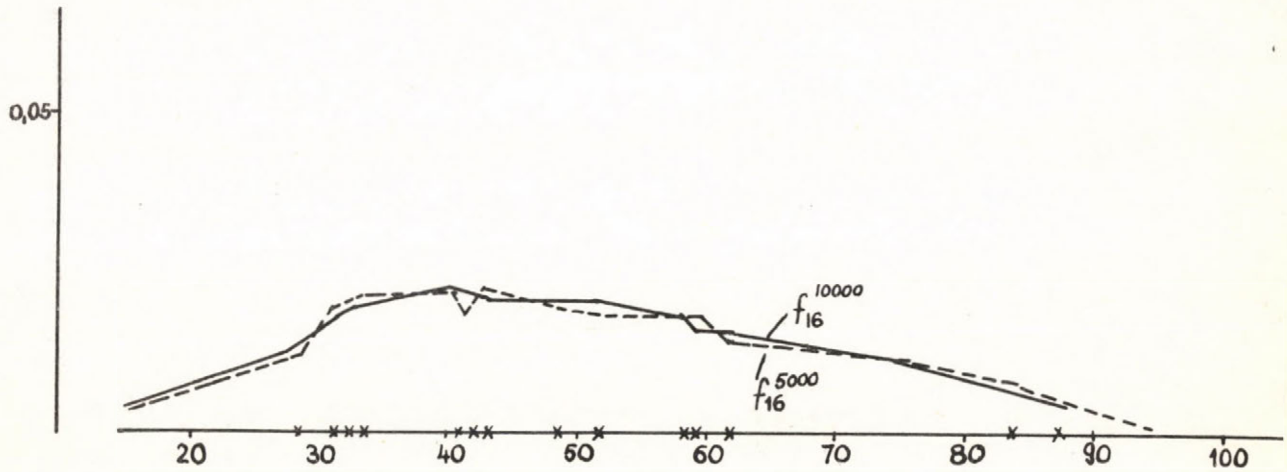
2. ábra: η sürüségfüggvényének becslése

n = 16, $D\varrho_1$ = 1.8, $D\varrho_2$ = 2.7



3. ábra: ξ sürüségfüggvényének becslése

n = 16, $D\varrho_1$ = 0.4, $D\varrho_2$ = 0.6



4. ábra: η sürüségfüggvényének becslése

n = 16, $D\,\varrho_1 = 0.4$, $D\,\varrho_2 = 0.6$

Irodalom:

[1] Dávid Gábor: A sürüségfüggvény becsléséről /MTA Számitástechnikai Központja Közlemények 3. 163-181. oldal/

[2] Sanov I.N.: /1957/ On the probability of large deviations /in Russian/Math. Sbornik 42 /89/ 11-44.

[3] Sethuraman: /1964/ On the probability of large deviations of sample mean. Annals of Mathematical Statistics. 1964. Vol 35 /pp. 1304-1316/

S u m m a r y

The main results of these paper for empirical density and distribution functions defined in author's paper [1] are the followings:
Theorem 2. Let [a,b] be such an interval, in which $f(x)$ and $F^{-1}(x)$ in $[F(a), F(b)]$ are continuous, $f(x)$ has a first continuous derivate $f'(x)$, for which $0 \neq |f'(x)| < C_1$, $0 < f[x] < C$ then

$$\overline{\lim_{n}}\,\overline{\lim_{m}}\, \frac{C}{8C_1}\left(1-e^{-\frac{1}{n}(2+\alpha)\log n}\right)^{-1} \sup_{x\in[a,b]} \left|f_n^m(x) - f(x)\right| \leq 1$$

whith probability one.

A similar theorem holds for the empirical distribution function defined by the formula $F_n^m(x) = \int_a^x f_n^m(t)\,dt$ /3. Tétel/

In the applications of the Monte-Carlo-method it is costumary that the empirical distribution function is defined by the following manner: Let a_i^n be such points of the interval [a,b] for which $a_i^n < a_{i+1}^n$, $i=0,1,\dots,n-1$, and $a_{i+1}^n - a_i^n \to 0$ if $n \to \infty$ for all values of i, and let us denote by m_i the number of sample, which are elemets of $(a_i^n, a_{i+1}^n]$, and

$$G_m(x) = \frac{\sum_{i=1}^{j(x)} m_i}{m} \qquad if \quad x \in (a_{j(x)}^n, a_{j(x)+1}^n]$$

where m is the number of sample.

If $0 < F(a) < F[b] < 1$ then for arbitrary $\alpha > 0$

$$P\left(\overline{\lim_{m}} \sqrt{\frac{m}{2(2+\alpha)\log m}} \sup_{x\in[a,b]} |G_m(x) - F(x)| \leq 1\right) = 1$$

Р е з ю м е

Главные результаты этой статьи для эмпирической функции плотности и распределения, определённой автором в статье / I /, - это следующие:

Т е о р е м а 2.

Если функции $f(x)$ и $F^{-1}(x)$ непрерывные соответственно на отрезке $[a,b]$ и $[F(a),F(b)]$, и $f(x)$ обладает первой непрерывной производной $f'(x)$, для которой

$$0 \not\leq |f'(x)| < c_1, \quad 0 < f(x) < c;$$

тогда: $$\overline{\lim_{n}}\ \overline{\lim_{m}}\ \frac{c}{8c_1}\left(1-e^{-\frac{1}{n}(2+\alpha)\log n}\right)^{-1} \sup_{x\in[a,b]} |f_n^m(x) - f(x)| \leq 1$$

с вероятностью I.

Подобная теорема имеет место для эмпирической функции распределения определённой формулой:

$$F_n^m(x) = \int_a^x f_n^m(t)\,dt \qquad \text{/ Теорема 3 /}$$

В методе статистических испытаний обычно используется эмпирическая функция распределения, определённая следующим образом:

Пусть a_i^n точки отрезка / а, в / для которых $a_i^n < a_{i+1}^n$ $i=0,1,\dots,n-1$ и $a_{i+1}^n - a_i^n \longrightarrow 0$, если $n \longrightarrow \infty$ для всех значений i. Обозначим через m_i число выборочных значений, попадающих в отрезок $(a_i^n\ a_{i+1}^n]$ и пусть эмпирическая функция распределения:

$$G_m(x) = \frac{\sum_{i=1}^{j(x)} m_i}{m} \qquad \text{если } x \in (a_{j(x)}^n, a_{j(x)+1}^n)$$

если $0 < F(a) < F(b) < 1$, тогда для произвольного $\alpha > 0$

$$P\left(\lim_{m} \sqrt{\frac{m}{2(2+\ )\log m}}\ \sup_{x\in[a,b]} |G_m(x) - F(x)| \leq 1\right) = 1$$

Gyuris László:

Interpretált algoritmus-sémák analizise az automataelmélet segitségével

Gyakorlatilag fontos annak kideritése, hogy mit "tud" egy program, azaz valamely adott program a számológép milyen állapottranszformációját képes elvégezni. Jelen dolgozatban megmutatjuk, hogy ez az analizis-probléma könnyen megoldható az absztrakt automataelmélet segitségével. A számológépi programokat az interpretált ALS-ok (algoritmusok logikai sémái) nyelvén [2] adottaknak tekintjük.

Az 1. §.-ban a szükséges fogalmakat ismertetjük, a 2.§. tartalmazza a probléma megoldását.

1.§.

I. Definició: Algoritmusok logikai sémáin (ALS-ok) [3] olyan véges sorozatokat értünk, amelyek operátorokból (A_1, $A_2, \dots, A_n$) logikai feltételekből ($\alpha_1 \llcorner_{i_1}$, $\alpha_2 \llcorner_{i_2}$, ..., $\alpha_k \llcorner_{i_k}$) és jobb félzárójelekből ($\lrcorner_{i_1}$, $\lrcorner_{i_2}$, ... , $\lrcorner_{i_k}$) állnak olymódon, hogy a logikai feltételek és a jobb félzárójelek között egy-egy értelmü megfeleltetés áll fenn.

Tekintsük egy N alaphalmazt; a fenti operátorokat interpretáljuk ugy, mint az N halmaz önmagába történő leképezéseit, a logikai feltételeket pedig az N-en teljesen definiált logikai feltételeknek interpretáljuk. Ilymódon beszélhetünk - az N-re vonatkozóan - interpretált ALS-okról (a jobb félzárójelek csak segédszimbólumok), ezeket ALS_N-nel jelöljük. Ha például M egy számológép állapotai halmaza, akkor az ALS_M-ek programoknak felelnek meg.

Minden konkrét ALS_M valamely $\varphi: M \to M$ leképezés elvégzését jelöli ki. A φ realizálása az ALS_M következő <u>végrehajtási eljárásával</u> definiált:

<u>II. Definició:</u> az $\mathfrak{U}_M$ ALS_M <u>végrehajtása</u> valamely $m(\in M)$ állapotra:

/1/ Megvizsgáljuk az $\mathfrak{U}_M$ bal szélső szimbólumát; ha operátor, akkor elvégezzük az általa kijelölt leképezést m-re vonatkozóan (a továbbiakban az m szerepét az igy kapott M-beli elem játsza) és áttérünk a következő szimbólumra; ha logikai feltétel, akkor megnézzük, hogy m-re igaz-e, - ha igaz, akkor a következő szimbólumra térünk át, - ha nem, akkor a hozzátartozó jobb félzárójel után következő szimbólumra; ha jobb félzárójel, akkor a következő szimbólumra térünk át.

/2/ Tegyük fel, hogy k lépés elvégzése után kaptunk valamely m'-t és kijelöltük a séma valamely szimbólumát; e kijelölt szimbólumot és m'-t tekintve ugyanazt csináljuk, mint /1/-ben.

/3/ Amikor a legutolsó (jobb szélső) szimbólumhoz eljutunk, és az operátor, vagy olyan logikai feltétel, amelynek értéke igaz az aktuális m^* értékre, vagy jobb félzárójel, akkor az eljárást befejezettnek tekintjük. (Természetesen operátor esetén még el kell végezni az általa kijelölt leképezést.) - Ellenkező esetben az eljárás végtelenül folytatódik.

Ezen eljárás befejezésekor kapott $\mathfrak{U}_M(m)$ $(\in M)$-et az $\mathfrak{U}_M$ ALS_M m-re kapott <u>értékének</u> nevezzük. Ha valamely m-re az eljárás nem fejeződik be, akkor azt mondjuk, hogy m-re az $\mathfrak{U}_M$ értéke nem definiált.

III. Definició: Véges Mealy-automatának nevezzük az $\mathfrak{A} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ objektumot; ahol A, X és Y véges halmazok (rendre: állapotok, bemenőjelek és kimenőjelek halmaza); a $\delta = \delta(a,x)$ átmenetfüggvény, amely minden $a(\in A)$ és $x(\in X)$ esetén megadja a következő állapotot, a $\lambda = \lambda(a,x)$ kimenetfüggvény megmutatja, hogy $a(\in A)$ állapotban az $x(\in X)$ bemenőjel hatására az $\mathfrak{A}$ milyen $y(\in Y)$ kimenőjelet ad ki.

2.§.

Legyen az M bázishalmaz egy számológép állapotai halmaza. Felmerül a következő analizis-probléma: ha adott valamely $\mathfrak{A}_M$ ALS_M (azaz egy program), milyen $\varphi : M \to M$ leképezést lehet ezen $\mathfrak{A}_M$ végrehajtásával realizálni. Erre a problémára ad választ a következő

TÉTEL: Bármely ALS_M analizise redukálható egy megfelelő Mealy-automata analizisére.

BIZONYITÁS.

Tegyük fel, hogy adott valamely $\mathfrak{A}_M$ $(A_1, A_2, \ldots, A_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ ALS_M. Állitásunkat ugy bizonyitjuk, hogy megszerkesztünk egy, ezen $\mathfrak{A}_M$ végrehajtását realizáló iniciális véges Mealy-automatát. Az automataelmélet ismert módszereinek segitségével megoldjuk a kapott Mealy-automata analizisének problémáját, igy az ALS_M analizis-probléma megoldottnak tekinthető. A megfelelő $\mathfrak{A}$ Mealy-automatát a következőképpen konstruálhatjuk meg: Az $\mathfrak{A}$ állapothalmaza legyen az operátorok halmaza és a logikai feltételek baloldalán szereplő logikai függvények halmaza.

Bemenőjel-halmaznak válasszuk az M halmazt, a kimenőjelek halmaza is legyen M.

A δ átmenetfüggvény megfelel annak, ahogyan a logikai feltételek és a jobb félzárójelek az $\mathfrak{A}_M$ elemei közötti átmeneteket meghatározzák. A λ kimenetfüggvényt a következőképpen határozzuk meg: az operátoroknak megfeleltetett állapotokban az operátornak megfelelő transzformáció elvégzésekor kapott M-beli elemet adja ki az $\mathfrak{A}$; a logikai feltételeknek megfelelő állapotokban a kapott bemenőjel lesz a kimenőjel is.

Az $\mathfrak{A}$ automata tehát a következőképpen müködik: Tegyük fel, hogy valamely $m(\in M)$ elemre kell az ALS_M-et végrehajtani. Az iniciális állapotban m bemenőjelet kapja $\mathfrak{A}$. Továbbiakban az operátoroknak megfelelő állapotokban a megfelelő M-beli elem a bemenőjel, melyre $\mathfrak{A}$ az operátornak megfelelő transzformáció elvégzésével kapott M-beli elemet adja ki, és ez lesz a következő bemenőjel is. A logikai feltételeknek megfelelő állapotokban a logikai feltétel értéke a kapott aktuális M-beli elemtől függ, igy ez határozza meg az átmenetet.

Könnyü meggyőződni arról, hogy az igy konstruált

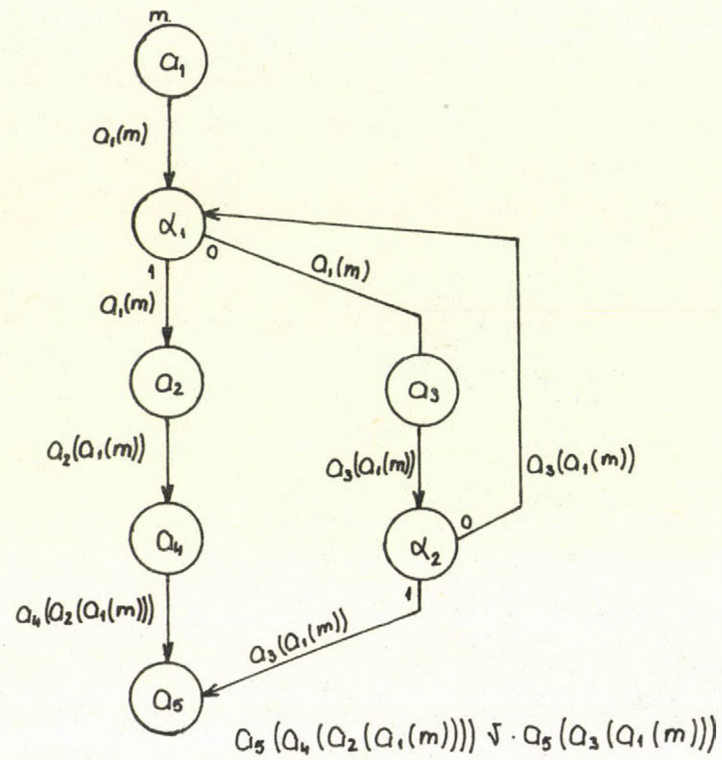
$\mathfrak{A} = \langle \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, M, M, \delta, \lambda \rangle$ Mealy-automata müködése bármely m kezdő-bemenőjellel indulva megfelel az $\mathfrak{A}_M$ m-re tekintett végrehajtásának.

A bizonyitásban szereplő megfeleltetési módszer illusztrálására tekintsük a következő példát:

PÉLDA.

Tekintsük az $\mathfrak{A}_M = A_1 \underset{2}{\rfloor} \alpha_1 \underset{1}{\llcorner} A_2 A_4\, 0 \underset{3}{\llcorner} \underset{1}{\rfloor} A_3 \alpha_2 \underset{2}{\llcorner} \underset{3}{\rfloor} A_5$ ALS_M-et, amelynek végrehajtása valamely $\varphi : M \rightarrow M$ leképezést realizál.

A megfelelő automata állapot-diagramját a következő ábra mutatja.



MEGJEGYZÉS.

A fenti módszer módositása az [1]-ben szereplő mikroprogram-automata kapcsolat alapgondolatának, amely eltekint attól a körülménytől, hogy a logikai feltételek értéke programokban az előző utasitások végrehajtásának eredményétől függ.

Irodalom:

1. V.M.Gluskov: O primenenii absztraktnoj teorii avtomatov dlja minimizacii mikroprogramm, "Izv. AN. SzSzSzR Techn. Kibernetika", 1964. No. 1, 3-8.

2. Gyuris, L.: On the connection of Glushkovian microprogram-algebras and logical schemes of the algorithms. "Proceedings of the International Colloquium on Recursive Functions and Their Applications. Tihany, 1967", Paris, 1968.

3. Ju.I.Janov: O logicseszkih szhemah algoritmov, szb. "Problemü kibernetiki", No. 1. 1958, 75-127.

Summary

László Gyuris

The analysis of the interpreted logical schemes of algorithms /LSA_s/ with the aid of the automata theory

There is a practically important problem to examine the capability of a program, more exactly what transformation of the states of the computer is a given program capable of accomplishing. This paper shows that the methods of the analysis of the automata can be directly applied to the solution of this problem; the following theorem holds:
The analysis of any interpreted LSA can be reduced to the analysis of an appropriate Mealy-automaton.

Анализ интерпретированных логических схем алгоритмов / ЛСА / с помощью теории автоматов

Практически существенная проблема заключается в том, чтобы выяснить, на что способна программа; точнее говоря, какую трансформацию состояний вычислительной машины может выполнять данная программа.

В этой работе мы покажем, что методы анализа автоматов можно применять к решению этой проблемы, т.е. мы докажем следующую теорему:

" Анализ любого интерпретированного ЛСА можно свести к анализу подходящего автомата Мили".

Gergely József:

Elektron-diffrakciós mérési adatok kiértékelése legkisebb négyzetek módszerével

Bevezetés

A gőzfázisban jelen levő molekulák geometriai szerkezetének felderitésére az egyik legkorszerübb és a MTA Kémiai-Szerkezeti Kutató Laboratóriumában az elmult két év során meghonositott eszköz az elektron-diffrakciós módszer. Ennek a módszernek a segitségével lehetőség van viszonylag nem bonyolult molekulák geometriai szerkezetének - a kötéstávolságoknak, a kötésszögeknek és a belső forgási formáknak - a meghatározására, valamint a molekula belső mozgásának - rezgési amplitudóknak, torziós amplitudóknak - a tanulmányozására is.

A geometriai paraméterek a diffrakciós képből előállitott intenzitáseloszlás elemzésével határozhatók meg. Az intenzitáseloszlás Fourier-transzformáltjaként előállitható az un. radiális eloszlás, mely az atommag-párok kölcsönös elhelyezkedési valószinüségét mutatja meg a molekulán belül és amelyen egyszerübb esetben a molekulában előforduló atommagtávolságok közvetlenül leolvashatók.

A kiértékelés egyik módja a radiális eloszlási görbe vizsgálata. A kiértékelés másik módja a kisérletileg előállitott intenzitáseloszlás és radiális eloszlás összehasonlitása az elméletileg feltételezett molekula-modellekre számitott megfelelő eloszlásokkal. Ez az összehasonlitás történhet a próbák és hibák módszerével vagy-pedig a legkisebb hibanégyzet összeg keresésével.

A kiértékelési munka során, elsősorban az elméleti görbék kiszámitásánál és a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásánál szükség van a számológépek széleskörü alkalmazására.

Az MTA Számitástechnikai Központjában számolásokat végeztünk a kisérleti intenzitás eloszlásgörbéket legkisebb hibanégyzettel megközelitő elméleti görbék meghatározására. A továbbiakban ismertetjük az alkalmazott numerikus módszert és a számolással kapcsolatban felmerült problémákat. Hasonló számolásokról ad részletes leirást az [1] dolgozat.

Legkisebb négyzetek módszere

Tekintsük az

$$y = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m) \qquad /1/$$

függvénykapcsolatot, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_m$ a függvény paraméterei. Legyenek az $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > m)$ argumentumértékeknél az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mennyiségek adottak.
Képezzük az

$$S_p = \sum_{i=o}^{n} p_i \left[f(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_m) - y_i \right]^2 \qquad /2/$$

összeget, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_n$ adott pozitiv számok, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokhoz tartozó sulyok. A legkisebb négyzetek módszere azon $a_1, a_2, \ldots, a_m$ paraméterértékek megkeresését jelenti, amelyek mellett a /2/ összeg minimális lesz.

Tegyük fel, hogy $f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ a paraméterek folytonosan differenciálható függvénye. Ahhoz, hogy /2/ az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ paraméterértékeknél szélsőértéket vegyen fel, teljesülni kell a

$$\frac{\partial S_p}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

egyenleteknek, azaz

$$\sum_{i=o}^{n} p_i \left[f(x_i,a_1,a_2,\dots,a_m) - y_i \right] \frac{\partial f\,(x_i,a_1,a_2,\dots,a_m)}{\partial a_k} = 0, \qquad /3/$$

$$k = 1,2,\dots,m.$$

Tegyük fel, hogy valamilyen módon ismerjük a paraméterek a_1^o, $a_2^o,\dots,a_m^o$ közelitéseit és keressük az optimális paraméterértékeket

$$a_j = a_j^o + \alpha_j, \quad j = 1,2,\dots,m \qquad /4/$$

alakban. Helyettesitsük /3/-ban az $f(x_i,a_1,a_2,\dots,a_m)$ függvényértéket az elsőrendü tagokig felirt Taylor sorával

$$\sum_{i=o}^{n} p_i \left[f(x_i,a_1^o,\dots,a_m^o) - y_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x_i,a_1^o,\dots,a_m^o)}{\partial a_j} \alpha_j \right] \qquad /5/$$

$$\frac{\partial f\,(x_i,a_1,\dots,a_m)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1,2,\dots,m.$$

Bevezetve a

$$c_i = y_i - f(x_i,a_1^o,\dots,a_m^o), \quad b_{ij} = \frac{\partial f(x_i,a_1^o,\dots,a_m^o)}{\partial a_j} \qquad /6/$$

jelöléseket és feltételezve, hogy az α_j, $j = 1,2,\dots,m$ korrekciók kicsik, /5/ és /6/-ból kapjuk

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=o}^{n} p_i\, b_{ij}\, b_{ik} \right) \alpha_j = \sum_{i=o}^{n} p_i\, c_i\, b_{ik}, \qquad /7/$$

$$k = 1,2,\dots,m.$$

A /7/ lineáris egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus, pozitiv definit, igy az α_j korrekciók mindig meghatározhatók. A /7/-ből számolt α_j korrekciókat /4/-be helyettesitve jutunk ujabb közelitésekhez. Majd a /6/, /7/ és /4/ iterativ alkalmazásával keressük a minimumot szolgáltató paraméterértékeket.

Képletek felirása

Számolásainkban az elméleti görbét az

$$sM(s) = q \sum_{k=1}^{K} g_k \, e^{-\frac{l_k}{2}s^2} \frac{\sin sr_k}{r_k} \qquad /8/$$

képlettel határoztuk meg, ahol q a kisérleti és elméleti görbék közötti arányossági tényező, r_k a molekulában levő atomok közti k-adik távolság, l_k az ehhez tartozó rezgési amplitudó, K pedig a különböző távolságok száma. (A szimmetrikus helyzetü távolságokat egyszer vesszük figyelembe.) Jelöljük továbbá N-el a molekulában levő atomok számát, Z_i-vel az i-edik atom rendszámát, n_k-val a k-adik távolság előfordulási számát és határozza meg a k-adik távolságot a k_1 és k_2-ik atom, akkor a /8/-ban szereplő

$$g_k = \frac{n_k Z_{k1} Z_{k2}}{\sum_{i=1}^{N} (Z_i^2 + Z_i)} \qquad /9/$$

Az r_k távolságok között a molekula geometriai szerkezete által meghatározott összefüggések állnak fenn. Bizonyos távolságok egymástól függetlenül megválaszthatók és meghatározzák a többi távolságot. Válasszuk meg az indexelést ugy, hogy a független távolságok $r_1, r_2, \dots, r_{K_1}$, az ezektől függők $r_{K_1+1}, \dots, r_{K_1+K_2} = r_K$ legyenek.

A kisérleti görbe y_i értékeit az

$$s_i = s_{min} + i \frac{s_{max} - s_{min}}{n}, \quad i=0,1,\dots,n$$

4

helyen mért $sM(s)$ mennyiségek szolgáltatják.

A /2/-ben szereplő p_i sulyokat a

$$p_i = s_i \, e^{-bs_i^2} \qquad /10/$$

képlettel számoltuk, ahol b minden egyes feladathoz rögzitett szám.

Számolásainkban az $r_1, r_2, \ldots, r_{K_1}$, $l_1, l_2, \ldots, l_K$ és a q mennyiségek paraméterekként szerepelnek, amelyekre jó kiindulási értékekkel rendelkezünk.

Differenciáljuk /8/-at ezen paraméterek szerint és számoljuk ki /6/-nak megfelelően a b_{ij} mennyiségeket:

$$b_{io} = \left. \frac{\partial sM(s)}{\partial q} \right|_{s=s_i} = \frac{s_i M(s_i)}{q} \qquad /11/$$

$$b_{ij} = \left. \frac{\partial sM(s)}{\partial l_j} \right|_{s=s_i} = - q \, g_j \, l_j \, s_i^2 \, e^{-\frac{l_j^2}{2} s_i^2} \, \frac{\sin s_i r_j}{r_j} \qquad /12/$$

$$j = 1, 2, \ldots, K,$$

mig $j = 1, 2, \ldots, K_1$-re az r_j szerinti deriváltakból kapjuk

$$b_{i,K+j} = \left. \frac{\partial sM(s)}{\partial r_j} \right|_{s=s_i} = q \, g_j \, e^{-\frac{l_j^2}{2} s_i^2} \left(\frac{s_i \cos s_i r_j}{r_j} - \frac{\sin s_i r_j}{r_j^2} \right)$$

$$+ q \sum_{k=K_1+1}^{K} g_k \, e^{-\frac{l_k^2}{2} s_i^2} \left(\frac{s \cos s_i r_k}{r_k} - \frac{\sin s_i r_k}{r_k^2} \right) \frac{\partial r_k}{\partial r_j} \qquad /13/$$

/13/-ból látható, hogy a b_{ij} mennyiségek meghatározásához ki kell számolnunk a $\frac{\partial r_k}{\partial r_j}$ deriváltakat, azaz képeznünk kell egy $K_2=K-K_1$ sorból és K_1 oszlopból álló

$$J = \left\{ \frac{r_k}{r_j} \right\}, \quad k=K_1+1,\ldots,K, \quad j=1,2,\ldots,K_1 \qquad /14/$$

mátrixot. Kevés atomot tartalmazó molekula esetén explicit képleteket lehet adni a J elemeinek kiszámitására. Azonban sok atomos bonyolult szerkezetü molekula esetén nagyon nehéz feladat a J mátrix meghatározása, és sok esetben ez a probléma korlátozza az ismertetett módszer használhatóságát. Jelen cikkünkben J számolásával nem foglalkozunk.

A számolás menete. Megjegyzések.

A kisérleti radiális eloszláson leolvasott értékekből és, ha szükséges, egyéb meggondolás alapján összeállitjuk a paraméterek kiindulási értékeit. A /6/, /8/, /11/, /12/ és /13/ képletekkel kiszámoljuk a c_i és b_{ij} mennyiségeket, majd a /7/-es egyenlet megoldásaként kapott korrekciókkal javitjuk a megfelelő paramétereket. Ezt iterativ módon addig folytatjuk, mig el nem érjük a kivánt pontosságot.

Mindenegyes lépésnél kiszámoljuk a /2/ összeget is. Az egymásutáni iterációknál számolt S_p összegek mutatják az iterációs eljárás konvergenciájának gyorsaságát. Megjegyezzük, hogy a /4/ képlet helyett célszerübb az $a_j = a_j^0 + \beta\alpha_j$ képleteket használni, ahol $0 < \beta \leq 1$ konvergencia faktor. Számolásainkban általában a $0.3 \leq \beta \leq 0.6$ értékkel dolgoztunk.

Az eredményül kapott paraméterértékek bizonyos hibával adják meg a paraméterek elméleti értékeit. A hiba nagyságát a kisérleti görbe mérési pontossága és véletlen hibái határozzák meg. Az a_j paraméter hibáját a

$$\Delta a_j = \left[\frac{T_{jj} \left(\sum_{i=0}^{n} p_i c_i^2 - \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} t_{kl} \alpha_k \alpha_l \right)}{n-m} \right]^{\frac{1}{2}}$$

képlettel számoljuk, ahol

$$t_{kl} = \sum_{i=0}^{n} p_i b_{ik} b_i$$

T_{jj} pedig a $\{t_{kl}\}$ mátrix inverzének j-edik diagonális eleme.

Az ismertetett módszer alkalmazása közben számolási problémák lépnek fel. Egyik ilyen probléma, hogy bizonyos l_j paraméterekhez tartozó /12/-vel számolandó b_{ij} mennyiségek nagyon kicsik lesznek. Ennek következtében a /7/ egyenletrendszer együtthatói közt nagy nagyságrendi különbségek adódnak és az egyenletrendszer megoldása pontatlanná válik. Ez a pontatlanság különösen a minimumhely közelében jelentkezik és bizonyos közelség elérése után elrontja az iteráció konvergenciáját.

A számolás szempontjából "rosszul viselkedő" l_j paraméterek olyan rezgési amplitudókhoz tartoznak, amelyek az elektron-diffrakciós módszerrel csak nagyon pontatlanul határozhatók meg. Ezeket más módszerek vagy irodalmi adatok felhasználásával ismerteknek tekintjük és ezen l_j-k szerint nem optimalizálunk.

A számolásokat az Ural-2 számológépen végeztük. Ujabb nehézséget jelentett, hogy a számolás programja nem fér el a gép operativ memóriájában, ezért a számolás több program egymásutáni futtatásával lehetséges. A programokat Koszó Gábor készitette.

A számolást kontrollképpen elvégeztük az [1]-ben tárgyalt $(CH_2)_3$ molekulára, majd az MTA Kémia-Szerkezeti Kutató Laboratórium megbizásából az általuk szolgáltatott adatok alapján az SO_2Cl_2, $SOCl_2$

molekulákra, továbbá folyamatban vannak a $[(CH_3)_2N]_2SO$ molekulára vonatkozó számolások.

Irodalom:

[1] Hedberg K., Iwasaki M., Fritsch F.N., Bastiansen O.: Least-Squares Reginement of Molecular Structures from Gaseous Electron-Diffraction Sector-Microphotometer Intensity Data, Acta Cryst. 17, 529-543, 1964. (Három egymásután közölt cikk.)

Summary

Least-squares calculations have been carried out in order to refine electron diffraction data collected for molecular structure studies. The paper describes the numerical method applied and the problems connected with the computation.

Резюме

В нашем институте были проведены расчёты для расшифровки газовых электроннографических данных методом наименьших квадратов. В статье описаны применённый вычислительный метод и возникающие проблемы, связанные с вычислениями.

Szelezsán János:

Optimális vezérlési feladat numerikus megoldása

Tegyük fel, hogy a rendszer állapotát az

$$u(x,t) = \int_0^t K(x,t,s)\, f(s)\, ds \qquad /1/$$

vagy

$$u(x,t) = \int_a^b K(x,t,s)\, f(s)\, ds \qquad /2/$$

kifejezés irja le, és tekintsük az $f(s)$ függvényt vezérlőfüggvénynek.

Ismeretes, hogy a matematikai fizika számos egyenletének megoldása irható fel 1/ ill. 2/ alakban; az $f(s)$ függvény általában perem, vagy kezdeti feltételt jelent.

Vegyük az $u(x,t)$ állapotfüggvény egy $u(x_0,t)$ vagy $u(x,t_0)$ "metszetét". Ez a metszet a $K(x_0,t,s)$ ill. $K(x,t_0,s)$ maggal egy Volterra, vagy Fredholm tipusu operátorral irható fel, azaz

$$u(x_0,t) = K_1 f = \int_0^t K(x_0,t,s)\, f(s)\, ds$$

$$u(x,t_0) = K_2 f = \int_0^{t_0} K(x,t_0,s)\, f(s)\, ds$$

$$u(x_0,t) = K_3 f = \int_a^b K(x_0,t,s)\, f(s)\, ds$$

$$u(x,t_0) = K_4 f = \int_a^b K(x,t_0,s)\, f(s)\, ds$$

Jelöljük a továbbiakban a K_1, K_2, K_3, K_4 operátorokat közösen K-val.

Tekintsük a

$$J(f) = (Kf-q, Kf-q) = \|Kf-q\|_{L_2}^2 \qquad 3/$$

funkcionált, ahol $q \in L_2$ adott elem.

A $J(f)$ funkcionál tehát az $u(x_0,t)$ vagy $u(x,t_0)$ metszetnek, egy adott $q(t)$ vagy $q(x)$ függvénytől való L_2 távolságnégyzetét méri.

Az f vezérlőfüggvényekre tegyünk bizonyos korlátozásokat. Legyen a megengedett f vezérlések $F \subset L_2$ halmaza egy zárt, korlátos, konvex halmaz.

1. Feladat. Keressük meg az F halmaznak azt az f^{*} elemét, amely minimalizálja a 3/ funkcionált.

Ismeretes, hogy a tett feltételek mellett az 1. Feladatnak létezik egyetlen megoldása (lásd pl. [3]).

Az alábbiakban numerikus megoldási módszert adunk; a feladatot matematikai programozási feladatra vezetjük vissza.

Legyen F_n egy véges ε-háló F-ben. Legyen K_m (a K operátorral azonos tipusu) a K operátorhoz erősen tartó operátorok sorozata, azaz legyen

$$\lim_{m \to \infty} \| K_m - K \| = 0$$

Vegyünk a 3/ funkcionálban a skaláris sorozat /integrál/ helyett, valamilyen közelitését /pl. a trapézformulát/. Tegyük fel, hogy ez a közelités olyan, hogy $u \in L_2$ esetén

$$(u, u)_k \to (u,u) \qquad \text{ha } k \to \infty$$

ahol $(u, u)_k$ jelöli a (u,u) skaláris szorzat helyett vett közelitő formulát.

Tekintsük a 3/ funkcionál helyett a

$$J_k(f_n) = (K_m f_n - q, K_m f_n - q)_k \qquad 3^*/$$

funkcionált, és az eredeti feladat helyett oldjuk meg a következő feladatot.

2. Feladat: Határozzuk meg a 3^*/ funkcionál minimumát az F_n halmazon.

Legyen az egyszerüség kedvéért $k = n$, $m=n$.

Rögzitett n esetén egy véges dimenziós, matematikai programozási feladatot kapunk. Ezt az ismert módszerek valamelyikével megoldhatjuk. Jelöljük a 2. Feladat megoldását rögzitett n-esetén f_n^*-al.
A konveganciát illetően igaz az alábbi tétel:

Tétel /1/

$$\lim_{n \to \infty} J_n(f_n^*) = J(f^*)$$

és ha K pozitiv definit operátor, akkor

$$\| f_n^* - f^* \|_{L_2} \to 0. \quad \text{ha } n \to \infty$$

Bizonyitás.

A $J(f)$ ill. $J_n(f_n)$ funkcionál helyett vegyük a

$$J^{(1)}(f) = \| Kf - q \|$$

$$J_n^{(1)}(f_n) = \| K_n f_n - q \|_n$$

funkcionálokat. Ezek feladatunk szempontjából ekvivalensek a $J(f)$ ill. $J_n(f)$ funkcionálokkal.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén meg lehet választani N_0-t ugy, hogy

$$\left| \| K_n f_n^* - q \|_n - \| Kf^* - q \| \right| < \varepsilon$$

legyen hacsak $n > N_0$.

Vegyünk először olyan N_1-et, hogy $n > N_1$-re

$$\left| \| K_n f_n^* - q \|_n - \| K_n f_n^* - q \| \right| < \varepsilon_1,$$

teljesüljön. A feltevések szerint ezt megtehetjük.
Ekkor

$$\left| \| K_n f_n^* - q \|_n - \| Kf^* - q \| \right| \leq$$

$$\leq \left| \| K_n f_n^* - q \|_n - \| K_n f_n^* - q \| \right| + \left| \| K_n f_n^* - q \| - \| Kf^* - q \| \right| \leq \qquad 4/$$

$$\leq \varepsilon_1 + \left| \| K_n f_n^* - q \| - \| Kf^* - q \| \right|$$

Vizsgáljuk meg a

$$\left| \| K_n f_n^* - q \| - \| Kf^* - q \| \right|$$

különbséget.

A feltételek szerint a K_n operátorsorozat erősen konvergál K-hoz, ezért N_2-t meg lehet ugy választani, hogy $n > N_2$-re

$$\| K f_n - K_n f_n \| < \varepsilon_2$$

legyen.

De ekkor

$$\|K_n f_n^{*} - q\| = \big|\|K_n f_n^{*} - q\| - \|K_n f_n^{*} - q\|_n\big| + \|K_n f_n^{*} - q\|_n \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 + \|K_n f_n^{*} - q\|_n \leq \|K_n f_n - q\|_n + \varepsilon_1 \leq$$

$$\leq \big|\|K_n f_n - q\|_n + \|K_n f_n - q\|\big| + \|K_n f_n - q\|\big| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon_1 + \|Kf_n - q\| \leq \|K_n f_n - Kf_n\| + \|Kf_n - q\| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \|K f_n - q\| = \varepsilon_2^{*} + \|Kf_n - q\|$$

De a $\|Kf - q\|$ funkcionál folytonos, F_n ε -háló, ezért $\varepsilon_3 > 0$ esetén N_3-at meg lehet ugy választani, hogy

$$\|K f_n - q\| - \|Kf^{*} - q\| < \varepsilon_3$$

teljesüljön, hacsak $n > N_3$.

Ekkor viszont $N_o = \max (N_2, N_3)$ választással elérhető, hogy

$$\|K f_n^{*} - q\| - \|Kf^{*} - q\| < \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_4 \qquad 5/$$

teljesüljön, hacsak $n > N_o$.

Most megmutatjuk, hogy

$$\|K_n f_n^{*} - q\| - \|Kf^{*} - q\| \geq - \varepsilon_o,$$

is teljesül, hacsak $n > N^{*}$.

Ugyanis érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\|K_n f_n^{*} - q\| = \|(Kf_n^{*} - q) - (Kf_n^{*} - K_n f_n^{*})\| \geq$$

$$\geq \|Kf_n^{*} - q\| - \|Kf_n^{*} - K_n f_n^{*}\| \geq$$

$$\geq \|Kf_n^{*} - q\| - \varepsilon_2 \geq \|Kf^{*} - q\| - \varepsilon_2$$

Innen:

$$\| K_n f_n^* - q \| - \| K f^* - q \| \geq -\varepsilon_2 = \varepsilon^{0} \qquad 6/$$

Az 5/ és 6/ egyenlőtlenségekből azonban következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén N-t meg lehet ugy választani, hogy

$$\left| \| K_n f_n^* - q \| - \| K f^* - q \| \right| < \varepsilon$$

teljesüljön, hacsak n N. De ez 4/-el együtt éppen azt jelenti, hogy

$$J_n(f_n^*) \longrightarrow J(f^*)$$

Most megmutatjuk, hogy

$$J(f_n^*) \longrightarrow J(f^*)$$

Mivel

$$\| K f_n^* - q \| = \| (K f_n^* - K_n f_n^*) + (K_n f_n^* - q) \| \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 + \| K_n f_n^* - q \|$$

ezért

$$\| K f_n^* - q \| - \| K_n f_n^* - q \| < \varepsilon_1$$

hacsak $N > N_1$.

Ugyanakkor

$$\| K f_n^* - q \| = \| (K_n f_n^* - q) - (K_n f_n^* - K f_n^*) \| \geq$$

$$\geq \| K f_n^* - q \| - \varepsilon_2$$

vagyis

$$\| K f_n^* - q \| - \| K_n f_n^* - q \| > - \varepsilon_2$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\left| \| K f_n^* - q \| - \| K_n f_n^* - q \| \right| < \varepsilon$$

hacsak $n > N$.

Ekkor azonban

$$\left| \| K f_n^* - q \| - \| K f^* - q \| \right| \leq$$

$$\leq \left| \| K f_n^* - q \| - \| K_n f_n^* - q \| \right| +$$

$$+ \left| \| K_n f_n^* - q \| - \| K f^* - q \| \right| < \varepsilon^*$$

hacsak $n > N^o$.

Irjuk most fel az eredeti funkcionált a következő alakban:

$$J(f) = (Kf - q,\ Kf - q) =$$

$$= (K^* Kf,\ f) - 2(K^* q,\ f) = (q,q)$$

Az $A = K^* K$, $h = K^* q$ jelölésekkel

$$J(f) = (Af,\ f) - 2(h,f) + (q,q)$$

Vegyük a $J(f)$ funkcionál helyett a

$$J^o(f) = J(f) - (q,q) = (Af,\ f) - 2(h,f)$$

funkcionált. Világos, hogy ha $J(f_n^*) \longrightarrow J(f^*)$, akkor $J^o(f_n^*) \longrightarrow J^o(f^*)$ és f^* minimalizálja a $J^o(f)$ funkcionált is. A $J^o(f)$ funkcionál tetszőleges z esetén felirható

$$J^o(f^* + z) = (A\ (f^* + z),\ f^* + z) - 2(f^* + z,h) =$$

$$= J^o(f^*) + 2(Af^* - h,\ z) + (Az,z)$$

alakban, és $z = f_n^* - f^*$ mellett

$$J^o(f_n^*) = J^o(f^*) + 2(Af^* - h,\ f_n^* - f^*) +$$

$$+ (A\ (f_n^* - f^*),\ f_n^* - f^*) \tag{7/}$$

azaz

$$J^o(f_n^*) - J(f^*) = 2\ (Af^* - h,\ f_n^* - f^*) + (A\ (f_n^* - f^*),\ f_n^* - f^*)$$

Mivel f^* minimalizálja a $J^o(f)$ funkcionált, ezért (lásd [2]).

$$2\,(Af^* - h,\ f_n^*) \geq 2\,(Af^* - h, f^*)$$

vagyis

$$2\,(Af^* - h,\ f_n^* - f^*) \geq 0$$

De akkor 7/-ből azt kapjuk, hogy

$$J(f_n^*) - J(f^*) = J^o(f_n^*) - J^o(f^*) \geq$$

$$\geq (A(f_n^* - f^*),\ f_n^* - f^* \qquad 8/$$

Mivel $A^* = A$, azaz A önadjugált, és a feltételek szerint pozitiv definit, ezért

$$(Ax,x) \geq m_A\ \|x\|^2 \qquad \text{ahol} \qquad m_A = \inf_{\|x\|=1} (Ax,x)$$

De akkor

$$J(f_n^*) - J(f^*) \geq (A(f_n^* - f^*),\ f_n^* - f^*) \geq$$

$$\geq m_A\ \|f_n^* - f^*\|^2$$

és mivel $J(f_n^*)$ $J(f^*)$

ezért

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n^* - f^*\|_{L_2} = 0.$$

Ezzel tételünket bebizonyitottuk.

Érvényes az alábbi tétel is.

Tétel /2/

Tegyük fel, hogy a K operátor $K(t,s)$ magja eleget tesz az alábbi egyenlőtlenségnek

$$|K(t,s) - K(\tau,s)| \leq W(|t-\tau|)\ v(s)$$

ahol $W(\xi)$ folytonos, $W(0)=0$ és $v(s)\in L_2$, akkor

$$Kf_n^* \to Kf^*$$

egyenletesen.

Bizonyitás.

A 8/ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \| Kf_n^* - Kf^* \|_{L_2} = 0.$$

Megmutatjuk, hogy a $Kf_n^*(n=1,2,\dots),Kf^*$ függvényrendszer egyenlő mértékben folytonos.

Valóban

$$\left| Kf_n^* \Big|_{t=t'} - Kf_n^* \Big|_{t=t''} \right| =$$

$$= \left| \int_\alpha^\beta K(t', s)\, f_n^*(s)ds - \int_\alpha^\beta K(t'',s)\, f_n^*(s)ds \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_\alpha^\beta |K(t', s) - K(t'', s)|^2 ds}\; \| f_n \| \leq$$

$$\leq (\beta-\alpha)\, C_1 C_2\, W(|t-\tau|) < \varepsilon \quad , \text{ ha } |t-\tau| < \delta$$

ahol felhasználtuk, hogy $\| f_n \| < C_1$, $\| v(s) \| < C_2$

Ismeretes azonban, hogy ha q_n, q, egyenlő mértékben folytonosak, akkor $q_n \xrightarrow{L_2}$ q-ból következik $q_n \xrightarrow{C} q$. Esetünkben ez éppen azt jelenti, hogy $Kf_n^* \to Kf^*$.

A közelitő megoldás konvergenciája Volterra tipusu operátor esetén

Tegyük fel, hogy a K operátor Volterra tipusu. Legyen a megengedett vezérlőfüggvények halmaza a következő:

$$F = \Big\{ f(t): \quad 1/\ f(t) \in C^{(2)}$$

$$2/\ a(t) \le f(t) \le b(t);\ a(t) < b(t)$$

$$a(t),\ b(t) \in C^{(2)}$$

Vegyük az (a,b) intervallumnak $t_i = ih$, $i=1,2,\dots,n$, $h = \frac{T}{n}$ felosztását. Legyen $P^{(n)}$ az n-edfoku polinomok halmaza, és $P_n \subset P^{(n)}$ ennek olyan részhalmaza, amelynek $p_n \in P_n$ elemei a t_i pontban kielégitik az

$$a(t_i) \le p_n(t_i) \le b(t_i)$$

egyenlőtlenséget.

Vegyük a 3/ funkcionál helyett a

$$J_n(f^n) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(1)} \Big(\sum_{j=1}^{i} c_j^{(2)} \left[K(t_i,s_j) f_j - g_i \right]^2$$

funkcionált, ahol $g_i = g(t_i)$, $f_j = f(t_j)$ és a $c_i^{(1)}$, $c_j^{(2)}$ számok valamilyen kvadratura formula konstansai. A P_n halmazt ugy lehet tekinteni, mint az $f(t_i)$ $i=1,2,\dots,n$ pontokon áthaladó n-edfoku polinomok halmazát.

Az eredeti feladat helyett tekintsük az alábbi feladatot:

$$\min_{f_1,f_2,\dots,f_m \in P_n} J_n(f_1,f_2,\dots,f_n)$$

ahol

$$P_n = \begin{cases} a(t_1) \le f_1 \le b(t_1) \\ \vdots \\ a(t_n) \le f_n \le b(t_n) \end{cases}$$

Minden n-re kapunk egy matematikai programozási feladatot, amit az ismert módszerek valamelyikével megoldhatunk. Jelöljük a megoldást $f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*$ -al és tekintsük az $f_1^*, \dots, f_n^*$ pontokon áthaladó $p_n^*(t) \in P_n$ interpolációs polinomot az eredeti feladat megoldásának.

A /2/ tételből következik, hogy

$$\lim_{n \to \infty} (K p_n^* - Kf^*) = 0$$

Érvényes az alábbi tétel is.

<u>**Tétel**</u>

Tegyük fel, hogy az operátor magja $K(s,s) > 0$, monoton nő és $K(t,s) \in C^{(2)}$ a $0 \le s \le T$ intervallumban és tegyük fel, hogy

$$K p_n^* - Kf^* = O(h^{\alpha})$$

akkor

$$p_n^*(t_i) - f^*(t_i) = \begin{cases} O(h^{\alpha-1}) & \text{ha} \quad \alpha \le 2 \\ O(h) & \text{ha} \quad \alpha > 2 \end{cases}$$

azaz

$$f_i^* - f^*(t_i) = \begin{cases} O(h^{\alpha-1}) & \text{ha} \quad \alpha \le 2 \\ O(h) & \text{ha} \quad \alpha > 2. \end{cases}$$

ahol $h = \frac{T}{n}$

<u>**Bizonyítás**</u>

A feltevés szerint

$$K p_n^* - Kf^* = O(h^{\alpha}) \qquad 0 \le s \le T$$

vagyis

$$K\,(p_n^* - f^*) = O(h^{\alpha})$$

azaz

$$\int_0^t K(t,s)\,(p_n^*(s) - f^*(s))\,ds = O(h^{\alpha})$$

A t_i pontra a trapézformulát alkalmazva az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{h}{2} K(t_i,s_o)\left[p_n^*(s_o) - f^*(s_o)\right] + \frac{h}{2} K\,(t_i,s_i)\left[p_n^*(s_i) - f^*(s_i)\right] +$$

$$+ h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i,s_j)\left[p_n^*(s_j) - f^*(s_j)\right] + O(h^2) =$$

$$= O(h^{\alpha})$$

illetve a $p_n^*(s_j) - f^*(s_j) = \varepsilon_j$ jelölést alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{h}{2} K\,(t_i,t_o)\,\varepsilon_o + \frac{h}{2} K\,(t_i,t_i)\,\varepsilon_i + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i,s_j)\,\varepsilon_j =$$

$$= O(h^{\alpha}) + O(h^2)$$

azaz

$$\frac{h}{2} K(t_i,t_i)\,\varepsilon_i = -\left[\frac{h}{2} K(t_i,t_i)\,\varepsilon_o + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i,s_j)\,\varepsilon_j +\right.$$

$$+ O(h^{\alpha}) + O(h^2)$$

Irjuk fel ezt az egyenlőséget i helyett $i+1$-re; ekkor

$$\frac{h}{2} K(t_{i+1}, t_{i+1}) \varepsilon_{i+1} = -\left[\frac{h}{2} K(t_{i+1}, t_o) \varepsilon_o + h \sum_{j=1}^{i} K(t_{i+1}, s_j) \varepsilon_j + \right.$$

$$+ O(h^{\alpha}) + O(h^2)$$

Vonjuk ki ebből az egyenlőségből az előzőt. Kapjuk, hogy

$$\frac{h}{2} \left[K(t_{i+1}, t_{i+1}) \varepsilon_{i+1} - K(t_i, t_i) \varepsilon_i\right] = -\left\{\frac{h}{2}\left[K(t_{i+1}, t_o) - K(t_i, t_o)\right]\varepsilon_o\right.$$

$$+ h \sum_{j=1}^{i-1} \left[K(t_{i+1}, s_j) - K(t_i, s_j)\right] \varepsilon_j + hK(t_{i+1}, s_i) \varepsilon_i +$$

$$+ O(h^2) + O(h^{\alpha})$$

Ezt az egyenlőséget az alábbi alakra hozhatjuk:

$$\frac{h}{2} \left[K(t_{i+1}, t_{i+1}) \varepsilon_{i+1} + K(t_i, t_i) \varepsilon_i\right] = -\left\{\frac{h}{2} K(t_{i+1}, t_o) - K(t_i, t_o)\right]\varepsilon_o$$

$$\left. + h \sum_{j=1}^{i-1} \left[K(t_{i+1}, s_j) - K(t_i, s_j)\right]\varepsilon_j + h\left[K(t_{i+1}, t_i) - K(t_i, t_i)\right] \varepsilon_i\right\}$$

$$+ O(h^{\alpha}) + O(h^2)$$

Irjunk itt i helyett i+1-et:

$$\frac{h}{2} \left[K(t_{i+2}, t_{i+2}) \varepsilon_{i+2} + K(t_{i+1}, t_{i+1}) \varepsilon_{i+1}\right] =$$

$$= -\left\{\frac{h}{2} \left[K(t_{i+2}, t_o) - K(t_{i+1}, t_o)\right] \varepsilon_o + \right.$$

$$+ h \sum_{j=1}^{i} \left[K(t_{i+2}, s_j) - K(t_{i+1}, s_j)\right] \varepsilon_j +$$

$$+ h\left[K(t_{i+2}, t_{i+1}) - K(t_{i+1}, t_{i+1})\right] \varepsilon_{i+1} +$$

$$+ O(h^{\alpha}) + O(h^2)$$

Vonjuk ki ebből az előzőt, ekkor a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\frac{h}{2}\left[K(t_{i+2},t_{i+2})\varepsilon_{i+2} - K(t_i,t_i)\varepsilon_i\right] = -\Big\{\varepsilon_o \frac{h}{2}\left[(K(t_{i+2},t_o)-K(t_{i+1},t_o)) -\right.$$

$$\left. - (K(t_{i+1},t_o) - K(t_i,t_o))\right] + h\sum_{j=1}^{i-1}\left[(K(t_{i+2},s_j) - K(t_{i+1},s_j)) -\right.$$

$$\left. - (K(t_{i+1},s_j) - K(t_i,s_j))\right]\varepsilon_j +$$

$$+ h\,\varepsilon_i\left[(K(t_{i+2},t_i) - K(t_{i+1},t_i)) - (K(t_{i+1},t_o) - K(t_i,t_i)\right] +$$

$$+ h\,\varepsilon_{i+1}\left[(K(t_{i+2},t_{i+1}) - K(t_{i+1},t_{i+1})\right] + O(h^{\alpha}) + O(h^2)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Delta K_j = \left[K(t_{i+2},t_j) - K(t_{i+1},t_j)\right]$$

$$\Delta^2 K_j = \left[K(t_{i+2},t_j) - K(t_{i+1},t_j)\right] - \left[K(t_{i+1},t_j) - K(t_i,t_j)\right]$$

Igy h-val történő osztás után az alábbi alakot kapjuk:

$$\frac{1}{2}\left[K(t_{i+2},t_{i+2})\varepsilon_{i+2} - K(t_i,t_i)\,\varepsilon_i\right] =$$

$$= -\left[\frac{\varepsilon_o}{2}\Delta K_o + \sum_{j=1}^{i-1}\Delta^2 K_j\,\varepsilon_j + \Delta^2 K_i\,\varepsilon_i + \Delta K_i\,\varepsilon_{i+1}\right] +$$

$$+ O(h^{\alpha-1}) + O(h)$$

azaz

$$\left|\frac{K(t_{i+2},t_{i+2})}{2}\right|\left|\varepsilon_{i+2}\right| - \left|\frac{K(t_i,t_i)}{2}\right|\left|\varepsilon_i\right| \le \left|\frac{\varepsilon_o}{2}\right|\left|\Delta^2 K_o\right| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1}\left|\Delta^2 K_j\right|\left|\varepsilon_j\right| + \left|\Delta^2 K_i\right|\left|\varepsilon_i\right| + \left|\Delta K_{i+1}\right|\left|\varepsilon_{i+1}\right| +$$

$$+ O(h) + O(h^{\alpha-1}) \qquad 9/$$

A tett feltevések alapján

$$\Delta^2 K_j = A_j h^2$$

$$\Delta K_j = B_j h$$

Legyen

$$A > \max_{j=1,2,\dots,n} \left(|A_0|, |A_j|, |B_j|\right)$$

$$A = Q \frac{|K(t_i,t_i)|}{2} \text{ ; ahol } \quad Q > 1.$$

Akkor a 9/ egyenlőtlenséget az alábbi alakban irhatjuk fel:

$$\left|\frac{K(t_{i+2},t_{i+2})}{2}\right| \left|\varepsilon_{i+2}\right| - \left|\frac{K(t_i,t_i)}{2}\right| \left|\varepsilon_i\right| \leq$$

$$\leq Ah^2 \sum_{j=0}^{i} |\varepsilon_i| + Ah\, |\varepsilon_{i+1}| + O(h^{\alpha-1}) + O(h)$$

Megmutatjuk, hogy a

$$e_{i+2} - e_i = Qh^2 \sum_{j=0}^{i} e_j + Qh\, e_{i+1} + O(h^{\alpha-1}) + O(h)$$

egyenlet megoldásai majorizálják az $|\varepsilon_i|$ értékeket, azaz $|\varepsilon_i| < e_i$.

Valóban legyen

$$e_0 = e_1 = e_2 = \max\left(|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\right) = e$$

Tegyük fel, hogy $|\varepsilon_j| \leq e_j \quad j=3,4,\dots,i.$

Akkor

$$\left|\frac{K(t_{i+2},t_{i+2})}{2}\right| \left|\varepsilon_{i+2}\right| - \left|\frac{K(t_i,t_i)}{2}\right| \left|\varepsilon_i\right| \leq$$

$$< Ah^2 \sum_{j=0}^{i} e_i + Ah\, e_{i+1} + O(h) + O(h^{\alpha})$$

Válasszuk meg e_{i+2}-t ugy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$\left|\frac{K(t_{i+2},t_{i+2})}{2}\right| \left|\varepsilon_{i+2}\right| - \left|\frac{K(t_i,t_i)}{2}\right| \left|\varepsilon_i\right| \le$$

$$\le Ah^2 \sum_{j=0}^{i} e_j + Ah\, e_{i+1} + O(h^{\alpha-1}) + O(h) = \qquad 10/$$

$$= \left|\frac{K(t_i,t_i)}{2}\right| \quad e_{i+2} - e_i$$

Ekkor

$$\left|\frac{K(t_{i+2},t_{i+2})}{K(t_i,t_i)}\right| \left|\varepsilon_{i+2}\right| - \left|\varepsilon_i\right| \le e_{i+2} - e_i$$

azaz

$$\left|\frac{K(t_{i+2},t_{i+2})}{K(t_i,t_i)}\right| \left|\varepsilon_{i+2}\right| \le e_{i+2}$$

és mivel a feltevés szerint $\dfrac{K(t_{i+2},t_{i+2})}{K(t_i,t_i)} \geq 1$, ezért

$\left|\varepsilon_{i+2}\right| \le e_{i+2}$

10/-ből az alábbi egyenletet kapjuk:

$$e_{i+2} - e_i = Qh^2 \sum_{j=0}^{i} e_j + Qh\, e_{i+1} + O(h^{\alpha-1}) + O(h)$$

Irjunk itt i helyett $i+1$-et; ekkor

$$e_{i+3} - e_{i+1} = Qh^2 \sum_{j=0}^{i+1} e_j + Qh\, e_{i+2} + O(h) + O(h^{\alpha-1})$$

Vonjuk ki ebből az előbbi egyenlőséget, azt kapjuk, hogy

$$e_{i+3} - e_{i+2} - e_{i+1} + e_i = -Qh\, e_{i+1} + Qh^2\, e_{i+1} +$$

$$+ Qh\, e_{i+2} + O(h) + O(h^{\alpha-1})$$

illetve

$$e_{i+3} - (1+Qh)\, e_{i+2} - (1+Qh^2 - Qh)\, e_{i+1} + e_i =$$

$$= O(h) + O(h^{\alpha-1})$$

Oldjuk meg a kapott egyenletet. Irjuk fel a homogén egyenletet:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (1+Qh)\,\lambda^2 - (1+Qh^2-Qh)\lambda + 1 = 0$$

Megmutatjuk, hogy ennek az egyenletnek három valós gyöke van, és elég kis h-ra

$$\lambda_1 = -1 + O(h); \qquad \lambda_2 = 1-O(h); \qquad \lambda_3 = 1+O(h)$$

Valóban

1/ $P(0) = 1 > 0$

2/ $P(1) = 1-(1+Qh)-1+Qh^2+Qh+1 = -Qh^2 < 0$

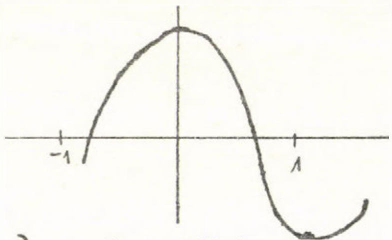
3/ $P(-1) = -2Qh+Qh^2$ és ha $h < 2$, akkor $-2Qh+Qh^2 < 0$

4/ $P(1+Qh) = (1+Qh)^3 - (1+Qh)^3 - (1+Qh^2-Qh)\,(1+Qh) + 1 =$

$= Qh^2\,(Q-1-Qh)$

és ha $Q-1-Qh > 0$, azaz $\frac{Q-1}{Q} > h$ (Q 1) akkor $P(1+Qh) > 0$

Ez azt jelenti, hogy a $P(\lambda)$ görbe alakja az alábbi:



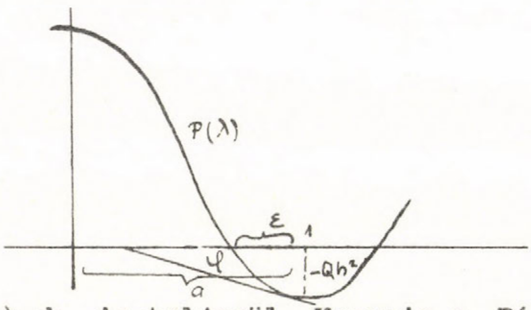
Megmutatjuk, hogy $\lambda_2 = 1 - O(h)$.

Valóban az alábbi ábrán

$$P(1) = 3\lambda^2 - 2\,(1+Qh)\lambda - (1+Qh^2-Qh)\Big|_{\lambda=1} = -Qh-Qh^2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -Qh-Qh^2 = \frac{-Qh^2}{a}$$

$$a = \frac{h}{1+h}$$



és

$$\varepsilon < a = \frac{h}{1+h} = O(h)$$

Megmutatjuk, hogy $\lambda_2 - \lambda_3 = O(h) = ch$ is teljesül. Ugyanis a $P(\lambda)$ függvény szélsőérték helyére az alábbi egyenlőtlenség irható fel:

$$3\lambda^2 - 2(1+Qh)\lambda - (1+Qh^2-Qh) = 0$$

$$0 < \lambda_1^e = \frac{(1+Qh) + \sqrt{4+Qh+Q^2h^2+3Qh}}{3} >$$

$$> \frac{1+Qh+2}{3} = 1 + \frac{Qh}{3}$$

Világos, hogy $\lambda_3 > \lambda_1^{(e)}$ ahonnan $\lambda_2 - \lambda_3 = ch.$

Keressük meg az inhomogén egyenlet egy általános megoldását.

Kapjuk

$$e_i^{(o)} = \frac{O(h) + O(h^{\alpha-1})}{1-[O(h)+O(h^{\alpha-1})][1+Qh^2-Qh] - [1+Qh][O(h) + O(h^{\alpha-1})]^2 + [O(h)+O(h^{\alpha-1})]^3}$$

Igy az inhomogén egyenlet megoldásai

$$e_i = e_i^{(o)} + c_1 \cdot \lambda_1^i + c_2 \lambda_2^i + c_3 \lambda_3^i$$

ahol a c_1, c_2, c_3 számok az alábbi egyenletrendszer gyökei:

$$e_o = e = e_i^{(o)} + c_1 + c_2 + c_3$$

$$e_1 = e = e_i^{(o)} + c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3$$

$$e_2 = e = e_i^{(o)} + c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 + c_3 \lambda_3^2$$

Innen

$$c_1 = \frac{-(e-e_i^{(o)})\lambda_2\lambda_3 - (e-e_i^{(o)})(\lambda_2+\lambda_3) + (e-e_i^{(o)})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$$

$$c_2 = \frac{-(e-e_i^{(o)})\lambda_1\lambda_3 - (e-e_i^{(o)})(\lambda_1+\lambda_3) - (e-e_i^{(o)})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}$$

$$c_3 = \frac{(e-e_i^{(o)})\lambda_1\lambda_2 - (e-e_i^{(o)})(\lambda_1+\lambda_2) + (e-e_i^{(o)})}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}$$

azaz

$$c_1 = \frac{(\lambda_2-1)(\lambda_3-1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} - (e-e_i^{(o)})$$

$$c_2 = \frac{(\lambda_1 - 1)(1 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} (e - e_i^{(0)})$$

$$c_3 = \frac{(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} (e - e_i^{(0)})$$

De

$$c_1 = k_1 (e - e_i^{(0)})$$

$$c_2 = k_2 (e - e_i^{(0)})$$

$$c_3 = k_3 (e - e_i^{(0)})$$

ahol $k_1, k_2, k_3 < \infty$ és mivel $e = O(h)$, ezért $c_1 = O(h)$, $c_2 = O(h)$, $c_3 = O(h)$.

Ebből azonban következik, hogy $e_i = O(h)$ és igy $|\varepsilon_i| = O(h)$

Optimális vezérlés peremfüggvénnyel parciális differenciálegyenlet esetén

Tegyük fel, hogy egy objektum viselkedését egy $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq t \leq \beta$ téglalap alaku tartományon

$$Lu = f; \quad u = u(x,t) \qquad 11/$$

parciális differenciálegyenlet irja le az

$$lu = \varphi \qquad 12/$$

peremfeltétel mellett. /Legyen L és l lineáris operátor/

Vegyük ugy, hogy az objektum viselkedését a tartomány peremén vezéreljük, azaz jelentse a vezérlőhatást a φ függvény. Legyen $q(t) \in L_2$ egy adott függvény. Legyen x_0 egy adott pont $(a < x_0 < b)$.

Tekintsük a

$$J(\varphi) = \int_a^b \left[q(t) - u(x_0,t) \right]^2 dt \qquad 13/$$

kvadratikus funkcionált.

Legyen a φ vezérlőfüggvények $Q \in L_2$ halmaza egy zárt, konvex korlátos halmaz.

Feladat:

Keressük meg a Q halmaznak azt a $\varphi^* \in Q$ elemét, amely minimalizálja a 13/ funkcionált.

A feladatot a rácspont módszerrel matematikai programozási feladatra vezethetjük vissza.

Vegyünk a tartomány $x_n = n\,h$, $t_m = m\tau$, $\tau = rh$, (ahol r egy konstans $m = 0,1,2,\dots$, $n = 0,1,2,\dots$) rácspontjaihoz tartozó rácsponthálót, azaz a 11/, 12/ differenciálegyenlet helyett vegyük az

$$\underline{\underline{L}}_h\, \underline{u}^{(h)} = \underline{f}^{(h)}$$

$$\underline{\underline{l}}_h\, \underline{u}^{(h)} = \underline{\varphi}^{(h)}$$

differencia egyenletrendszert. Ebben a rendszerben az $\underline{u}^{(h)}$ vektor az $u(x,t)$ függvény $u(n\,h, m\tau)$ értékei közelitőértékeinek vektorát $\underline{f}^h$ pedig az $f(x,t)$ függvény $f(n\,h, m\tau)$ értékeinek vektorát jelöli.

Legyen x_0 olyan, hogy valamilyen h-val $x_0 = ih$ legyen.

Az ismeretlen $\varphi(t)$ függvényt közelitsük meg lépcsős függvénnyel; vegyük a lépcsősfüggvények alábbi halmazát:

$$\varphi^{(h)}(t) = \sum \alpha_i a_i^{(h)}(t)$$

ahol

$$a_i^{(h)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } (i-1)\,h \le t \le ih \\ 0 & \text{más esetben} \end{cases}$$

Legyen

$$Q_h = \{\varphi^{(h)}(t)\} \cap Q$$

Legyen

$$q^{(h)}(t) = \sum q_i a_i^{(h)}(t)$$

ahol

$$q_i = q(ih)$$

Rögzitett $\varphi^{(h)}(t)$ esetén a differenciálegyenlet valamilyen $\underline{u}^{(h)}$ közelitő megoldását kapjuk. Jelöljük $u_{x_0}^{(h)}$-val az $u^{(h)}(x_0, i\tau)$ értékekre "támaszkodó" lépcsősfüggvényt, azaz

$$u_{x_0}^{(h)} = \sum u_i a_i^{(h)}(t)$$

ahol

$$u_i = u^{(h)}(x_0, i\tau)$$

Vegyük a 13/ funkcionál helyett a

$$J^{(h)}(\varphi^{(h)}) = \int_a^b \left[q^{(h)} - u_{x_0}^{(h)} \right] dt$$

funkcionált.

Az eredeti feladat helyett oldjuk meg az alábbi feladatot:

$$J^{(h)}(\varphi^{h}) = \int_a^b [q^{(h)} - u_{x_0}^{(h)}]^2 \, dt$$

funkcionált az

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}$$

$$l_h u^{(h)} = \varphi^{(h)}$$

$$\varphi^{(h)} \in Q_h$$

feltételek mellett.

Minden h értékhez kapunk tehát egy matematikai programozási feladatot; ezt kell megoldani.

Tegyük fel, hogy a 11/ egyenletnek a 12/ feltétel mellett létezik Green függvénye, azaz a megoldás

$$u = K\varphi$$

alakban állitható elő.

Tegyük fel, hogy az $u^{(h)} = K_h \varphi^{(h)}$ közelitő megoldás konvergál az u megoldáshoz az x_0 pontban, azaz

$$\| u_{x_0}^{(h)} - u \| = \| K_h \varphi^{(h)} - K\varphi^{(h)} \| < \varepsilon$$

bizonyos h-tól kezdve.

Jelöljük φ^*-al az eredeti feladat megoldását $\varphi^{(h)*}$-al pedig a közelitő feladat megoldását. Az 1/ tétel alapján

$$\lim_{h \to 0} J^{(h)}(\varphi^{(h)}) = J(\varphi^*)$$

Irodalom:

[1] J.G.Gehnes: On the numerical solution of convolution integral equations (Math. of Comp. vol 15. No 3.)

[2] Szelezsán János: Egy disztribuciós paraméteres optimalizálási feladat megoldása (MTA Sz.K. "Közlemények" 3, 1967. 116-130.)

[3] Harnos Zsolt: Konvex zárt halmazok képének a zártságáról (MTA Sz.K. "Közlemények" 4. 1968.

S u m m a r y

Numerical solution of some problems of optimal control

The paper discusses control problems of such systems whose behaviour is described by partial differential equations and which are controlled under boundary or initial conditions. And among these problems there are considered such cases in which the solution of the differential equation (function of the state of the object) is represented, as a function of initial or boundary condition, in the following form:

$$u(x,t) = \int_0^t K(x,t,s)\, f(s)ds$$

or

$$u(x,t) = \int_a^b K(x,t,s)f(s)ds$$

In the following let us take some $u(x_o,t)$ or $u(x,t_o)$ "section" of the function of the state.

In the quality of criterion function we shall take a functional of the following type:

$$J(f) = \int_a^{\smile} [u(x_o,t) - q(t)]^2 \, dt = (Kf-q,\ Kf-q)$$

or

1/

$$J(f) = \int_a^b [\, u(x,t_o) - q(x)\,]^2 \, dt = (Kf-q,\ Kf-q)$$

where q is some given function, and operator K is of Fredholm type or of Volterra type.

We are dealing with problems of the minimization of functionals 1/ that is we are minimizing in the norm the difference between some "sections" of the solution of the differential equation and some function.

Let the set $Q \subset L_2$ of admissible control functions f be a closed, convex, boundary set.

Let the set F_n be ε -net. Let K_n be a sequence of operators strongly convergent to K.

Let us take instead of the scalar product some approximation of the same and let us give to this fact the notation $(u,u)_n$. Let us assume that

$$(u,u)_n \longrightarrow (u,u) \qquad \text{if } n \longrightarrow \infty$$

Let us take instead of functional 1/ the following "approximate" functional

$$J_n(f_n) = (K_n f_n - q,\ K_n f_n - q)_n \qquad 2/$$

Instead of the initial problem let us consider the following problem: let us define the minimum of functional 2/ on the set $Q_n = F_n \cap Q$.

Depending on the choice of approximate operators K_n and set F_n, the problem is reduced in certain cases to a problem of mathematical programming. We solve this problem with the aid of one of the known methods. We obtain for every n the approximate solution f_n which we may consider as an approximate solution of the initial problem.

With respect to the convergence. We obtain, that under conditions imposed on operator K_n and set F_n

$$\lim J_n(f_n^*) \longrightarrow J(f^*)$$

and if K is a positive definite operator, then

$$\left\| f_n^* - f^* \right\|_{L_2} \longrightarrow 0 \qquad \text{when} \qquad n \longrightarrow \infty$$

Under special conditions we obtain that $f_n^* \longrightarrow f^*$ uniformly.

Приближённое решение некоторых задач оптимального управления

В работе рассматриваются задачи управления таких систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, и управление которых происходит при граничных или начальных условиях. И среди этих задач рассматриваем такие случаи, когда решение дифференциального уравнения / функция состояния объекта / представляется, как функция начального или граничного условия $f(s)$, в следующем виде:

$$u(x,t) = \int_a^b K(x,t,s)\, f(s)ds \qquad \text{I./}$$

или:

$$u(x,t) = \int_0^t K(x,t,s)\, f(s)ds \qquad \text{2./}$$

Возьмём некоторое $u(x_0,t)$ или $u(x_0,t\,)$ "сечение" функции состояния $u(x,t)$

В качестве функции цели будем выбирать функциональ следующего типа:

$$J(f) = \int_a^b [u(x_0,t) - q(t)]^2\, dt = \|Kf - q\|^2$$

или:

$$J(f) = \int_a^b [u(x,t_0) - q(x)]^2\, dx = \|Kf - q\|^2 \qquad \text{4./}$$

где q - некоторая заданная функция, а оператор K типа Фредгольма, а именно:

$$Kf = \int_a^b K(x_0,t,s)\, f(s)ds, \quad \text{или} \quad Kf = \int_a^b K(x,t_0,s) f(s)ds$$

или типа Вольтера, а именно:

$$Kf = \int_0^t K(x_0,t,s) f(s)ds$$

где x_o, t_o - данные точки.

Рассматриваются задачи минимизации функционалов 4./ т.е. минимизируем в норме разницу между некоторым сечением дифференциального уравнения и некоторой функцией.

Пусть множество допустимых управляющих функции f некоторое $Q \subset L_2$ замкнутое выпуклое ограниченное множество.

Дадим приближённое решение задачи.

Пусть $\tilde{H}_n$ - ε - сеть в L_2.

Пусть K_n последовательность операторов сильно сходящихся к K.

Пусть $Q_n = Q \cap \tilde{H}_n$, и допустим, что $Q_n \neq 0$.

Возьмём вместо скалярного произведения какое-нибудь приближение его / например, какая-нибудь квадратурная формула /, обозначим этот факт символом $(.,.)_n$. Предположим, что для $u \in L_2$

$$|(u,u)_n - (u,u)| < \varepsilon \qquad \text{если} \quad n > N_o$$

Возьмём вместо функционала 4./ следующий "приближённый" функционал:

$$J_n(f_n) = (K_n f_n - q, \ K_n f_n - q)_n \qquad 5./$$

Вместо первоначальной задачи рассмотрим следующую задачу:

Определим минимум функционала 5./ на множестве Q_n.

В зависимости от выбора аппроксимирующих операторов K_n и множества H_n задача в некоторой части случаев сводится к задаче математического программирования. Например, если H_n есть множество ступенчатых функций, или полиномов. Эту задачу решим с помощью одного из известных методов. Получим для каждого n приближённое решение f_n^*, которое можем считать приближённым решением первоначальной задачи.

О сходимости доказываются следующие утверждения:

Пусть f^* - решение первичной задачи, а f_n^* - приближённой задачи. Тогда при условиях, наложенных на оператор K и множество H_n

$$\lim_{n \to \infty} J_n(f_n^*) = J(f^*)$$

6

И если К - положительно определенный оператор, тогда

$$\| f_n^* - f^* \| \xrightarrow{L_2} 0$$

Если для ядра оператора К имеет место

$$|K(t,s) - K(\tau,s)| \leq w(|t-\tau|)\ v(s)$$

где $w(\xi)$ равномерно непрерывна $v(s) \in L_2$ тогда

$$\lim_{n \to \infty} Kf_n^* \longrightarrow Kf^* \qquad \text{равномерно.}$$

При специальных условиях f_n^* сходится к f^* равномерно.

Varga Gyula:

<u>Párosfokszámu polinomok felbontása Hurwitz- és antihurwitz-komponensekre.</u>

1./ Szürők tervezésénél lépett fel az a feladat, hogy az $F(z^2)=\prod_{i=1}^{n}(z^2+\omega_i^2)^2+\varepsilon^2\prod_{h=1}^{m}(z^2+\gamma_h^2)^2$ párosfokszámu polinomot $F(z^2)=\prod_{i=1}^{n}(z^2+\alpha_i z+\beta_i)\cdot\prod_{i=1}^{n}(z^2-\alpha_i z+\beta_i)$ alakban Hurwitz- és antihurwitz-polinomok szorzatára bontsuk fel. ($0<\varepsilon\ll 1$, $0<m<n$, $0<\omega_i$, $0\leq\gamma_i$

Mivel $F(z^2)$ az $F_1(z^2)=\prod_{i=1}^{n}(z^2+\omega_i^2)+j\varepsilon\prod_{h=1}^{m}(z^2+\gamma_h^2)$ és $F_2(z^2)=\prod_{i=1}^{n}(z^2+\omega_i^2)-j\varepsilon\prod_{h=1}^{n}(z^2+\gamma_h^2)$ polinomok szorzatára bontható, elegendő $F_1(z^2)$ felső komplex félsikba eső gyökeinek meghatározása, mert ezek segitségével a $H(z)=\prod(z^2+2|z_{iv}|z+|z_i|^2)$ Hurwitz-polinom előállitható. A gyökök meghatározására a Newton-Raphson féle módszernek azt a változatát használjuk, amely az összes felső komplex félsikba eső gyök valamely alkalmas közelitéséből kiindulva iterációs lépésenkint valamennyi gyököt pontositja. E módszer előnye még az is, hogy nem kivánja meg az $F_1(z^2)$ függvény deriváltjának kiszámitását. (Kerner-féle változat.)

A gyökök kezdő közelitésének a $z_i^{(0)}=j\,\omega_i$ $(i=1,\dots,n)$ számokat tekintjük, s figyelembe véve, hogy $F_1(z^2)$ páros fokszámu, az iterációs eljárást a következő képlettel adhatjuk meg:

$$Z_i^{(k+1)}=Z_i^{(k)}-\frac{F_1\left(Z_i^{(k)2}\right)}{2Z_i^{(k)}\cdot\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq i}}\left(Z_l^{(k)2}-Z_i^{(k)2}\right)}\qquad (i=1,\dots,n)$$

Az iterációs eljárást a kellő pontosság elérése után fejezhetjük be.

A leirt eljárás programja kétszeres pontosságra készült az Ural-2 gépre EFT autókódban.

A program használatához az alábbi adatok szükségesek:

$$n,\ \omega_i^2,\ m,\ \gamma_n^2,\ \varepsilon.$$

Eredményül $F_1(z^2)$ felső komplex félsikbeli gyökeit kapjuk, melyekből a Hurwitz-polinom együtthatói egy már régebben elkészült program segitségével előállithatók.

2./ Az eddigiekben előfordultak olyan feladatok is, amelyekben az $F(z)=\prod_{i=1}^{n}(z^2+\omega_i^2)^2-\varepsilon^2 z^2\prod_{i=1}^{m}(z^2+\gamma_i^2)^2$ párosfokszámu polinomot kellett Hurwitz- és antihurwitz-polinomok szorzatára bontani ($\omega_i>0$, $\gamma_i\geq 0$, $0<\varepsilon\ll 1$, $0<m<n$). Mivel

$$F(z)=F_1(z)F_2(z)=\left[\prod_{i=1}^{n}(z^2+\omega_i^2)+\varepsilon z\prod_{i=1}^{m}(z^2+\gamma_i^2)\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}(z^2+\omega_i^2)-\varepsilon z\prod_{i=1}^{m}(z^2+\gamma_i^2)\right]$$

ezért elegendő az első tényezővel foglalkoznunk.

Az $F_1(z)$ polinom együtthatói valósak, ezért konjugált komplex gyökpárokkal rendelkezik. E gyökpárokhoz tartozó másodfoku tényezők $z^2-2\alpha_i z+\alpha_i^2+\beta_i^2$ alakuak, ahol α_i e gyökpárok valós részét, $\pm\beta_i$ pedig a képzetes részét jelenti. E másodfoku tényezők közül azok, amelyekben α_i negativ, egyben a $H(z)$ Hurwitz-polinomnak is tényezői. Feladatunk tehát abban áll, hogy megkeressük az összes olyan másodfoku tényezőket, melyekben α_i pozitiv, s helyettesitsük olyan tényezőkkel, melyeket ezekből α_i előjelének megváltoztatásával nyerünk, vagyis az $F_1(z)$ polinomot sorjában a $\dfrac{z^2+2\alpha_i z+\alpha_i^2+\beta_i^2}{z^2-2\alpha_i z+\alpha_i^2+\beta_i^2}F_1(z)$ -vel helyettesitsük. Ezek végrehajtása után eredményül a $H(z)$ Hurwitz-polinomot kapjuk. A fent megemlitett tényezőket Bairstow faktorizációs eljárásával kapjuk meg kétszeres pontosságra. Legyen

$$F_1(z)=(z^2-2\alpha_i z+\alpha_i^2+\beta_i^2)(z^{2n-2}+a_{2n-3}z^{2n-3}+\ldots+a_0)$$

akkor, f_k-val jelölve $F_1(z)$-ben z^k együtthatóját, f_k-t $f_k+4|\alpha_i|a_{k-1}$ -gyel kell helyettesitenünk ($k=2n-1,\ldots,1$), f_{2n} és f_0 változatlanok maradnak. A Bairstow-féle eljáráshoz kezdő közelitéseket a $z_i = j\omega_i$ segitségével képezhetünk.

A feladat megoldásának programja az Ural-2 gépre készült EFT autókódban kétszeres pontosságra.

Alkalmazásához a következő adatokat kell megadnunk:

$n, \ (n \leq 6), \ \omega_i, \ m, \ \gamma_i, \ \varepsilon.$

Eredményül a $H(z)$ Hurwitz-polinom együtthatóit kapjuk csökkenő fokszám szerint rendezve.

Varga Gyula:

A "Bairstow (n)" eljárás.

A BIT c. folyóirat 1967. évi 3. számában G.M.Birtwistle és D.J.Evans az alább ismertetésre kerülő módszert közölték polinomok faktorizációjá-a vonatkozóan:

Legyen adva egy $p(x)$ m-edfoku polinom és valamely n-edfoku tényezőjének ($n \leq \frac{m}{2}$) egy $q(s)$ közelitése. A pontos $Q(x)$ tényezőhöz a következő eljárás segitségével juthatunk el:

A $p(x)$-nek $q(x)$-szel való osztása révén adódó $p(x)=q(x).r(x)+s(x)$ azonosságot ($r(x)$ a hányados, $s(x)$ a maradék) a $q(x)$ polinom i-edfoku tagjának együtthatója szerint parciálisan deriválva ($i=0,1,\ldots,n-1$) kapjuk az

$$x^i r(x) = -q(x)\frac{\partial r(x)}{\partial q_i} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial s_j}{\partial q_i} x^j$$

egyenlőséget. Eszerint a $\frac{\partial s_j}{\partial q_i}$ parciális deriváltat $x^i.r(x)$-nek $q(x)$-szel történő elosztása révén kapjuk, mint az osztási maradék j-edfoku tagjának együtthatóját, ellenkező előjellel véve.

Jelöljük a pontos $Q(x)$ és a közelitő $q(x)$ polinomok különbsége k-adfoku tagjának együtthatóját δ_k-val,

$$\delta_k = Q_k - q_k \qquad (k=0,1,\dots,n-1)$$

a $p(x)$-nek $Q(x)$-szel való osztása révén kapott maradékot $s(Q)$-val $(\equiv 0)$, a $q(x)$-szel való osztás révén kapott maradékot pedig $s(q)$-val. $s(Q)$ j-edfoku tagjának együtthatóját, $s_j(Q)$-t Taylor-sorba fejtve kapjuk:

$$0 = s_j(Q) = s_j(q) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \frac{\partial s_j(q)}{\partial q_k} + \underbrace{\dots} \qquad (j=0,1,\dots m-1)$$

A δ_k 1-nél magasabb hatványait tartalmazó tagokat elhanyagolva δ_k meghatározására a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \frac{\partial s_j(q)}{\partial q_k} = - s_j \qquad (j=0,1,\dots,n-1)$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. Ennek megoldásait q együtthatóihoz hozzáadva, a $Q(x)$ polinomra jobb közelitést kapunk.

$$q_k^{(i+1)} = q_k^{(i)} + \delta_k \qquad \begin{matrix}(k=0,1,\dots,n-1)\\(i=0,1,\dots)\end{matrix}$$

A módszer $n=1$-re a közönséges Newton-féle iterációs eljárást adja, $n=2$-re pedig a Bairstow-féle iterációs eljárást. Ezért a Bairstow-féle iterációs eljárás általánositásának tekinthető.

Az eljárás programja az Ural-2 gépre készült EFT autókódban lebegőpontos aritmetikával.

Varga Gyula:

Általánositott Bairstow-eljárás

G.H.Golub és T.B.Robertson az ACM közlemények 1967. juniusi számában a Bairstow-féle polinomfaktorizációs eljárásnak egy speciális általánositását közölték, melyet itt ismertetünk.

Az eljárás lehetővé teszi, hogy a $P_o, P_1, \dots, P_n$ polinomok valamely $a_o P_n + a_1 P_{n-1} + \dots + a_n P_o$ lineáris kombinációját, melyben $P_o = 1$, s a P_k polinomok a $P_{k+1} = (c_k x + d_k) P_k + e_k P_{k-1}$ $(k=0,1,\dots,n-1;\ P_{-1}=o)$ rekurziós formulának tesznek eleget, $(P_2 - \alpha P_1 - \beta P_o)$. $(b_o P_{n-2} + \dots + b_{n-2} P_o)$ alaku tényezők szorzatára bontsuk fel. A rekurziós képletben szereplő c_k, d_k, e_k tetszőleges valós számok lehetnek $(c_k \neq o)$. Mivel $P_1 . P_k$ kifejezhető P_{k+1}, P_k és P_{k-1} lineáris kombinációjaként, $P_2 . P_k$ pedig P_{k+2}, P_{k+1}, P_k, P_{k-1} és P_{k-2} lineáris kombinációjaként, azért a közönséges Bairstow-eljárásban szereplő polinomosztásokat, kisebb módositásokkal, elvégezhetjük, s igy egy iterációs eljárást kapunk, amely valamely α_o β_o közelitő értékekből kiindulva a pontos $P_2 - \alpha P_1 - \beta P_o$ tényező együtthatóihoz konvergál. A konvergencia másodrendü, akkor is, ha a pontos $P_2 - \alpha P_1 - \beta P_o$ tényezőnek kétszeres gyöke van.

Az általánositott Bairstow-féle faktorizációs eljárás, alkalmazható többek közt az un. tridiagonális mátrixok sajátértékeinek meghatározására. Az ilyen mátrixok karakterisztikus polinomját ui. a fent megadott rekurziós formula segitségével kaphatjuk meg.

Az eljárás programja az Ural-2 elektronikus számológépre készült lebegőpontosan EFT autókódban. Bemenő adatokként P_n rendszámát, az $a_o, \dots, a_n$ sulyokat, továbbá a rekurziós formulában szereplő c_k, d_k és e_k számokat kell megadnunk, eredményül a pontos tényező α és β együtthatóit kapjuk egyszeres szóhosszusággal.

Varga Gyula:

A La Budde-féle mátrix tridiagonalizálási algoritmus.

A Bairstow-féle polinomfaktorizációs eljárásnak egy, az ACM közleményekben (1967. junius) megjelent általánositása lehetővé teszi az un. tridiagonális mátrixok sajátértékeinek közvetlen meghatározását a karakterisztikus egyenlet együtthatóinak kiszámitása nélkül. Az itt ismertetésre kerülő La Budde-féle eljárás alkalmazható tetszőleges négyzetalaku mátrix tridiagonálissá tételéhez, anélkül, hogy a mátrix sajátértékeit megváltoztatná (ACM Computing Reviews 1968. április).

Az eljárás tetszőleges nxn-es mátrixot n-2 lépésben tridiagonalizál. Jelöljük az átalakitandó mátrixot A_1-gyel, az egyes lépések eredményeit $A_2, \dots,$-vel. A_i-ből A_{i+1}-et a következőképpen nyerjük: Particionáljuk A_i-t az alábbi módon:

$$A_i = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{c} T_i \\ \\ 0 \quad \underline{c}_i \end{array}}_{i} & \underbrace{\begin{array}{c} 0 \\ \hline \underline{b}_i \\ B_i \end{array}}_{n-i} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, i \\ \}\, n-i \end{array}$$

ahol T_i ixi nagyságu tridiagonális mátrix. A_{i+1}-et $R_i A_i R_i^{-1}$ alakban keressük, ahol R_i a következő alaku:

$$R_i = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & H_i \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, i \\ \}\, n-i \end{array}$$

$$\qquad\quad \underbrace{\qquad}_{i} \; \underbrace{\qquad}_{n-i}$$

ahol $H_i = I - \alpha(\underline{x}, \underline{y})$ alaku, R_i^{-1} pedig

$$
R_i^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{i} & \overbrace{\quad}^{n-i} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & H_i^{-1} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, i \\ \}\, n-i \end{array}
$$

ahol H_i^{-1}-et $H_i^{-1} = I - \beta(x,y)$ alakban keressük. Az itt szereplő α, β skalárokat továbbá az $\underline{x}$ n-i méretü oszlopvektort és az $\underline{y}$ n-i méretü sorvektort az alábbiakban határozzuk meg: $H_i H_i^{-1} = I$-ből adódik, hogy $\underline{yx} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, másrészt $R_i A_i R_i^{-1}$-ben c_i helyébe $H_i c_i$, b_i helyébe $b_i H_i^{-1}$ kerül, s az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ komponenseit ugy akarjuk megválasztani, hogy az 1. kivételével valamennyi 0 legyen. Igy 2(n-i)+2 ismeretlenre 2(n-i)-1 egyenletet irhatunk fel, további 3 feltétel önkényes megadásával az egyenletrendszer megoldható. A transzformációs lépés végrehajtása után kapott A_{i+1} már igy particionálható:

$$
A_{i+1} = \begin{array}{r} i\{ \\ n-i\{ \end{array} \overset{\begin{array}{cc} \overbrace{\qquad}^{i} & \overbrace{\qquad}^{n-i} \end{array}}{\left[\begin{array}{c|c} T_i & \begin{array}{c} 0 \\ \hline \begin{array}{c|c} b'_{i+1} & 0 \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c|c} 0 & \begin{array}{c} c'_{i+1} \\ \hline 0 \end{array} \end{array} & B'_i \end{array}\right]} = \begin{array}{r} i+1\{ \\ n-i-1\{ \end{array} \overset{\begin{array}{cc} \overbrace{\qquad}^{i+1} & \overbrace{\qquad}^{n-i-1} \end{array}}{\left[\begin{array}{c|c} T_{i+1} & \begin{array}{c} 0 \\ \hline b_{i+1} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c|c} 0 & c_{i+1} \end{array} & B_{i+1} \end{array}\right]}
$$

ahol T_{i+1} (i+1)x(i+1)-es tridiagonális mátrix, B_{i+1} pedig (n-i-1)x(n-i-1)-es mátrix. Az n-2-ik lépés eredményeként adódó A_{n-1} mátrix tridiagonális.

Az eljárás programja az Ural-2 gépre készült EFT autokódban. A mátrix elemeit sorfolytonosan kell megadnunk, s hasonló sorrendben kapjuk a tridiagonalizált mátrix elemeit.

TARTALOMJEGYZÉK

Ny. 2028/1968.